कार्यकर्ताओं ने इसके पाठ्यक्रम में जो सम्मिलित रखा है, वह कुछ सोच समझ कर ही रखा है।

आशा है, कि अध्यापक और विद्यार्थी हमारी इस पुस्तक को लाभदायक समझ कर अपनायेंगे और कृपा करके हमें यह बता देंगे कि इस में कौनसी त्रुटियाँ रह गई हैं। इसके लिए हम उन के कृतज्ञ होंगे और पुस्तक के दूसरे संस्करण को इस से और अधिक उपयोगी बना सकेंगे।

—लेखक

Arc	चाप
Arithmetic	अंक गणित
Average	औसत, मध्यमान
Axis	अक्ष
Axis of X	भुजाक्ष
Axis of Y	कोट्याक्ष
Bankruptcy	दिवाला
Base	आधार
Bisect	द्विसम विभाग करना, दो बराबर भाग करना
Bisector	द्विभाजक
Boundary	सीमा
Bracket	कोष्टक
Brokerage	दलाली
Capital	पूंजी
Centre	केन्द्र
Co-efficient	गुणक
Common	सार्व
Compound	मिश्र
Compound interest	चक्रवृद्धि ब्याज, सूद दर सूद
Congruent	सर्वांगसम
Construction	रचना
Converse	विलोम
Co-ordinates	नियामक
Corresponding	संगत
Cube	घन

Graph	लेखा चित्र
Graphically	लेखा चित्र द्वारा
Graph Paper	वर्गांकित पत्र
Hypotenuse	कर्ण
Interest	ब्याज, सूद
L. C. M.	ल० स०
Median	माध्यिका
Minus	ऋण
Miscellaneous	विविध, प्रकीर्ण
Multiple	अपवर्त्य
Multiplicand	गुण्य
Multiplier	गुणक
Negative	ऋण, ऋणात्मक
Origin	मूल बिन्दु
Parallel	समानान्तर
Parallelogram	समानान्तर चतुर्भुज,
Partial	आंशिक
Per cent	प्रतिशत
Perimeter	परिमिति
Perpendicular	लम्ब
Plus	धन
Point	बिन्दु
Positive	धन, धनात्मक
Presentworth	तत्काल धन
Principal (arith)	मूल धन

Reduce	लघु करना, छोटा करना
Remainder	शेषफल
Rent	किराया
Result	परिणाम
Rhombus	सम चतुर्भुज
Right	ठीक, दाहिना
Root	मूल
Rule (noun)	नियम, रीत
Rule of signs	चिन्ह नियम
Scale	स्केल
Side (of a figure)	भुजा
Side (of an equation)	पक्ष
Sign, like	समान चिन्ह
Sign, unlike	विषम चिन्ह
Size	विस्तार
Solid	पिंड
Solve	हल करना
Speed	चाल
Speed, average	औसत चाल
Square	वर्ग
Squared paper	वर्गांकित पत्र
Square root	वर्गमूल
Subtract	घटाना
Subtraction	बाकी, व्यवकलन
Surface	पृष्ठ, तल
Table	सारिणी

8 ड्राम	=	1 औंस
12 औंस	=	1 पौण्ड

(७) डाक्टरी माप (रसों के लिये)

60 मिनिम	=	1 ड्राम
8 ड्राम	=	1 औंस
20 औंस	=	1 पाइन्ट

(८) लम्बाई के पैमाने

12 इंच	=	1 फुट
3 फुट	=	1 गज
5½ गज	=	1 पोल
40 पोल	=	1 फर्लांग
1760 गज = ८ फर्लांग =		1 मील
3 मील	=	1 लीग
(22 गज	=	1 जरीब)

(९) धरातल के पैमाने

144 वर्ग इंच	=	1 वर्ग फुट
9 वर्ग फुट	=	1 वर्ग गज
30¼ वर्ग गज	=	1 वर्ग पोल
40 वर्ग पोल	=	1 रूड
4840 वर्ग गज = ४ रूड	=	1 एकड़
640 एकड़	=	1 वर्ग मील
(10 वर्ग जरीब	=	1 एकड़)

The Four Fundamental operations, Easy Factors of the types .—

(i) $k(a+b+c)=ak+bk+ck$

(ii) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

(iii) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$,

Simple equations involving one or two variables; and easy quadratic equations of one variable which can be solved by factors, Graphs of statistics

Candidates will be provided with graph paper, if necessary

N. B.—The teachers while using the text-books in Mathematics should keep in mind that the international numerals should be used, and geometrical figures should be named with Roman letters.

मान लो कि लक्ष्मीनारायण की सम्पत्ति $= x$ रुपये, तो,

$x + 2x = 6774$ रुपये

अर्थात् $3x = 6774$ रुपये

या $x = 2258$ रुपये

और $2x = 4516$ रुपये।

इन दोनों क्रियाओं में अन्तर तो कुछ नहीं है, परन्तु दूसरी क्रिया पहली क्रिया से छोटी अवश्य है।

याद रखो कि गणित की क्रियाओं में अक्षरों का मान निर्धारित नहीं होता। यह हमारी इच्छा है कि उनका जो मान हम चाहें निश्चित कर लें।

जैसे $x + y = z$

अब इसमें x और y का जो मान हम चाहें निश्चित करें, परन्तु यह आवश्यक है कि उनका योगफल z के बराबर हो, क्योंकि 'x' + 'y' और 'z' के बीच में बराबर का चिन्ह लिखा हुआ है।

नियम—यदि किसी प्रश्न में किसी संख्या को किसी अक्षर द्वारा प्रकट करो, तो उस प्रश्न की सारी क्रिया में उस अक्षर से उसी संख्या को प्रकट करो, उस अक्षर का कोई और मान मत मानो।

चिन्ह और परिभाषायें

(१) जमा, घटा, गुणा और भाग आदि के जो चिन्ह अंकों के साथ प्रयोग में आते हैं, वही अक्षरों के साथ भी काम में आते हैं, और उनका अर्थ भी वही होता है। परन्तु कुछ विशेष बातें ऐसी हैं जिनका विचार इस स्थान पर करना आवश्यक है। वे बातें यह हैं—

(२) यदि किसी राशि से पहले धन का चिन्ह हो तो उसे धनात्मक राशि कहते हैं और यदि उससे पहले ऋण का चिन्ह हो तो उसे ऋणात्मक राशि कहते हैं।

आदि में धन का चिन्ह साधारणतः नहीं लिखा जाता और इस अवस्था में भी उस राशि को धनात्मक कहते हैं।

जैसे $x-y+z$ में x और z धनात्मक राशियाँ कहलावेंगी और y ऋणात्मक राशि।

(३) चिन्ह का शब्द बहुधा केवल धन अथवा ऋण के चिन्हों के लिये ही प्रयोग में आता है।

(४) जब दो अक्षरों का गुणनफल प्रकट करना हो तो उनके बीच में साधारणतः गुणा का चिन्ह नहीं लिखा जाता।

जैसे xy का वही अभिप्राय है जो $x \times y$ का और abc का वही अभिप्राय है जो $a \times b \times c$ का।

अंकों में यह रीति काम नहीं दे सकती। हम 3×2 को 32 नहीं लिख सकते, क्योंकि $3 \times 2 = 6$ और $32 = 30 + 2$

(५) जब कुछ अक्षरों वाली राशियाँ धन तथा ऋण चिन्हों द्वारा आपस में सम्बन्धित हों, तो ऐसी राशियों के समूह को व्यंजक कहते हैं।

जैसे $3x-8y-4$ एक व्यंजक कहलावेगा।

(६) व्यंजक की हर राशि को जिससे पहले धन अथवा ऋण का चिन्ह हो पद कहते हैं।

(७) धन या ऋण चिन्ह व्यंजक के पदों का भाग होते हैं। हम चिन्हों को पदों से अलग नहीं कर सकते।

जैसे ऊपर के उदाहरण में $-8y$ एक पद है, इसे केवल $8y$ नहीं कह सकते, और यदि कहें तो इसका अर्थ $+8y$ हो जायगा।

कल्पित मान द्वारा अक्षरों का संख्यात्मक मान प्रतीत करना

(१) यदि किसी अक्षर को किसी अंक से गुणा करना हो तो वह अंक सदा अक्षर से पहले लिखा जायगा।
जैसे $2y$ का अभिप्राय है $y \times 2$ अर्थात् y का दुगुना।
इसी प्रकार $4z$ का अभिप्राय है z का चौगुना।
अंक और अक्षर के बीच में गुणन का चिन्ह नहीं लिखा जाता।

(२) $2x$ या $5x$ आदि ऐसी राशियां हैं जिनका मूल्य हम उस समय तक नहीं बता सकते जब तक हम को यह न पता हो कि x किस संख्या के बराबर है।

यदि x का अभिप्राय किसी बटुवे के रुपयों से हो, तो इस अवस्था में भी $2x$ एक अनिश्चित राशि है। हां, यदि यह पता हो कि बटुवे में 20 रुपये हैं, तो स्पष्ट है कि $2x = 2 \times 20$ रुपये और इस अवस्था में $2x$ एक निश्चित राशि बन गई।
अतः $2x = 40$; यदि $x = 20$
और $2x = 30$; यदि $x = 15$

(३) तुम जानते हो कि $5+7+9$ और $9+7+5$ के मान में कुछ अन्तर नहीं है। इसी प्रकार $x+y+z$ और $z+y+x$ के मान में भी कोई अन्तर नहीं होता। संक्षेप में हम कह सकते हैं कि अक्षरों को चाहे किसी क्रम से लिखो, इस से उनके मान में कोई अन्तर नहीं होता।

(४) $x-y$ और $y-x$ में जो अन्तर है उसे [illegible]
[illegible]

$x \div y \times z$ का अर्थ यह है कि x को y पर भाग देना है और जो भजनफल हो उसे z से गुणा करना है।

$x \div yz$ का अर्थ यह है कि x को y और z के गुणनफल पर भाग देना है।

अतः जब दो अक्षरों के बीच से गुणन का चिह्न निकाल दिया जाय तो उनका गुणनफल एक अकेली राशि मानी जाती है।

जैसे यदि $x = 16,\ y = 2,\ z = 4$

तो $x \div y \times z = 16 \div 2 \times 4 = \frac{16}{2} \times 4$
$= 32$

और $x \div yz = 16 \div (2 \times 4) = \frac{16}{8}$
$= 2.$

(५) यदि कुछ राशियों के बीच में धन, ऋण, गुणा और भाग के चिन्ह मिले जुले हों, तो पहले उन राशियों की क्रिया करनी चाहिये जिनके बीच में गुणा और भाग के चिन्ह हों, और फिर उन राशियों की जिनके बीच में धन और ऋण के चिन्ह हों।

जैसे $x \times y - z \div w \times l + m \times n$ की क्रिया इस प्रकार करो कि पहले $x \times y$ फिर $z \div w \times l$ फिर $m \times n$ का मान प्रतीत करो। जो राशियां इस प्रकार प्राप्त हों उनका योगफल और व्यवकलन फल निकाल लो।

(६) यदि किसी संख्या को उसी संख्या से गुणा किया जाय तो गुणनफल को उस संख्या की दूसरी शक्ति या घात कहते हैं।

जैसे 2×2 अर्थात् 4 को 2 की दूसरी शक्ति या वर्ग कहते है और इसे इस प्रकार लिखते हैं 2^2, इसी प्रकार x^2 का अभिप्राय x की दूसरी शक्ति या वर्ग है।

इसी प्रकार यदि किसी संख्या या अक्षर को उसी संख्या या अक्षर से दो बार गुणा किया जाय तो गुणनफल को उस संख्या या अक्षर की त्रिकशक्ति या घन कहते हैं।

जैसे 4^3, b^3।

उदाहरण (१) यदि $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=4$, तो $5a+3c-3b-2d$ का मूल्य प्रतीत करो।

$5a=5\times 1=5$

$3c=3\times 3=9$

$3b=3\times 2=6$

$2d=4\times 2=8$

अतः $5a+3c-3b-2d=5+9-6-8$
$=0$ उत्तर

उदाहरण (२) यदि $a=8$, $b=5$, $c=2$, तो $7a-6b+4c$ का मूल्य प्रतीत करो

$7a=7\times 8=56$,

$6b=6\times 5=30$,

$4c=4\times 2=8$,

अतः $7a-6b+4c=56-30+8$
$=34$ उत्तर

उदाहरण (३) $a=4$, $b=8$, $c=12$, $d=7$ तो $8a\div 3b\times 7c\div 2d$ का मूल्य बताओ

$8a\div 3b=\frac{8\times 4}{3\times 8}=\frac{4}{3}$

$\frac{4}{3}\times 7c=\frac{4}{3}\times 7\times 12=4\times 7\times 4$
$=112$

$112\div 2d=112\div(2\times 7)$
$=\frac{112}{14}$
$=8$ उत्तर

(१५) $6a-[3b-\{2c-(d+k)\}]$

(१६) $6b-2\{3b-2\{2c-3(d+k)\}\}$

(१७) $3ad-\{cd+(ab-bd-ac)\}$

(१८) $\frac{2d-(a+b)}{ad}-\frac{4c-(a+d)}{ab}+\frac{8b+(c-a)}{ac}$

(१९) $\frac{d-c}{a+(c-b)}-\frac{c-a}{d-(c-a)}+\frac{b+c}{c-(b-a)}$

(२०) $\frac{3ca}{(d-b-a)}+\frac{5bc}{2c-(b+a)}-\frac{7ad}{5b-(c+a)}$

(२१) सिद्ध करो कि $(d+b-c)(d-b+c)$
$=d^2-(b-c)^2$

(२२) सिद्ध करो कि $(c+b+a)(c-b-a)$
$=c^2-(b+a)^2$

(२३) सिद्ध करो कि $(c-b+a)(c-b-a)$
$=(c-b)^2-a^2$

(२४) सिद्ध करो कि $(cd^2-c^2d)=(bc^2+b^2c)$

राशियों को जोड़ना, घटाना और कोष्ठक

परिभाषाएँ :—

एक पद वाले व्यंजक को एकपदी व्यंजक कहते हैं।

दो पदों वाले व्यंजक को द्विपदी व्यंजक कहते हैं।

तीन पदों वाले को त्रिपदी और तीन से अधिक पदों वाले को बहुपदी व्यंजक कहते हैं।

उदाहरणार्थ a^2-bc एकपदी व्यंजक है।

$ab-cd$ द्विपदी व्यंजक है, [illegible] त्रिपदी और [illegible]

$2xyz$ बहुपदी व्यंजक है।

गुणनखण्ड. [illegible] गुणनफल [illegible] गुणनखण्ड कहते हैं।

समान चिन्हों वाले सजातीय पदों का जोड़

नियम (१) जब सजातीय पदों के चिन्ह समान हों तो पहले समान चिन्ह को लिखो, फिर सब पदों के संख्यात्मक गुणकों का जोड़ लिखो और इस जोड़ के आगे पदों के सार्व अक्षर लिख दो, अर्थात वे अक्षर लिख दो जो प्रत्येक पद में विद्यमान हैं।

नोट यदि किसी पद के पहले का चिन्ह न हो, तो उसे धनात्मक मानना चाहिये। धन पद जब किसी व्यंजक के आरम्भ में आ जाय तो साधारणतः '+' का चिन्ह नहीं लिखा जाता।

उदाहरण (१) $5a$, $3a$, $4a$, a को जोड़ो।

यहां संख्यात्मक गुणक $5+3+4+1$ और समान चिन्ह + है।

$\therefore$ योगफल $=13a$

उदाहरण (२) जोड़ो:—

$-9x^2y^2-4x^2y^2-5x^2y^2-7x^2y^2$

क्योंकि $9+4+5+7=25$ और समान चिन्ह '—' है;

$\therefore$ इष्ट योगफल $=-25x^2y^2$

उदाहरण (३) योगफल बताओ:—

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

यहां हमने व्यंजकों को इस प्रकार पंक्तियों में लिखा है कि सजातीय पद एक ही खड़ी पंक्ति में हैं। इसके पश्चात् हमने प्रत्येक खड़ी पंक्ति के पदों का जोड़ किया और बाईं ओर से योग की क्रिया आरम्भ की

विषम चिन्हों वाले सजातीय पदों को योग देना

नियम २ जब पद सजातीय हों और चिन्ह विषम हों, तो

प्रश्नावली २

निम्नलिखित व्यंजकों का योगफल निकालो:—

(१) $a+b-c, -5a+b+4c, 3a-2b+3c; 2a+2b-3c$

(२) $7x^2+5y^2+z^2, 2x^2-3y^2+3z^2, -4x^2-3y^2+2z^2, 5y^2-6z^2.$

(३) $5l-3a+2c, 2a-3l+c, 5c-2l-3a, -a-l-c$

(४) $2lm-3xy+2p, 4xy-3p+5lm; -3xy+2p-4lm, 3lm+2xy-p$

(५) $ab-bc+cd, bc-cd+ab, cd-ab-bc, ab-cd+bc.$

(६) $7+2x-3y+z, 5y-5+7z-3x, -8z-3y-12+2x, x+y+z-3$

(७) $-a-c-b-d, 3a-d-2c, 2b+3d+c, 5a-2b+3c-2d$

(८) $12p-3q+4pq; -pq-3p+2q, -6p+pq+2q, p-3pq+2q$

(९) $5l^2-3m^2-2n^2, 2l^2+2m^2-n^2, -3l^2-2m^2-6n^2, 4l^2+m^2+n^2, 5n^2-l^2-m^2$

(१०) $a^2+ab+3, 3a^2-7ab-2, -2a^2-ab-3, 3a^2+2ab+1, 4a^2-7+ab$

(११) $a^3+3a^2+1, 3a^2-2a-7, 2a^3-3a+5, 2a^3-2a^2+a+1; a^3+2a^2+3, 1-a^3$

(१२) $a^3-3a^2b+ab^2-b^3, -2a^3-3ab^2-2b^3, 5a^2b-3ab^2-b^3; a^3-3a^2b+$[illegible]$b^3.$

(१३) $2p^2-3pq+5q^2, 3q^2-5p^2+pq, 2pq-3p^2-3q^2, 5q^2+3p^2-3pq$

(१४) $5x^2y-3xy^2-2y^3, 2x^3-3y^3+7xy^2, 2y^3-3xy^2-7x^2y, -x^3-y^3-3x^2y.$

(१५) $1+a-a^2+a^3$ [illegible] $a^3-a^2-1+a^3$ [illegible] $-a^2-a$

(१६) $l-m$ [illegible] $3lm$ [illegible] $3lm$ [illegible]

घटाओ:—

(१०) $6a-b+c-3d$ में से $3a+b-c-d$ को।

(११) $6x-3y-4z+7$ में से $5x+2y-3z+9$ को।

(१२) $5a^2-7ab-12$ में से $-3ab+2$

(१३) $3x-4x^3+7x^2-9$ में से $8-2x-8x^3-2x^2$

(१४) $5a^3-9a^2+3$ में से $4a^3-6a-3$

(१५) $ab-bc-cd-ad$ में से $-ab+bc-3cd$

(१६) $a^2-1-2a^4-3a+5a^3$ में से $3a^3-4a^4+6a^2-1$

(१७) $6x^4+36+8x^2-9x$ में से $3x^3-7+8x^2-3x$

(१८) $-x^2+\frac{1}{3}xy-4y^2+yz-z^2$ को $x^2+\frac{1}{3}xy-2y^2+yz-4z^2$ में से।

(१९) a^2+b^2 में से $a^2+2ab+b^2$ और $a^2-2ab+b^2$ के योगफल को घटाओ।

(२०) x^2+xy और $xy+y^2$ के योगफल को x^2+xy+y^2 और x^2-xy+y^2 के योगफल में से घटाओ।

कोष्ठक

बीज-गणित में कोष्ठकों से बहुत काम लिया जाता है और ये बहुत उपयोगी होते हैं।

( ) { }, [ ], इन चिन्हों को कोष्ठक कहते हैं। कोष्ठकों के भीतर के व्यंजक या पद को एक राशि माना जाता है।

( ) लघु कोष्ठक, { } धनुकोष्ठक, और [ ] गुरु कोष्ठक। कभी-कभी किसी व्यंजक की भिन्न-भिन्न राशियों को एक राशि बनाने के लिए कोष्ठक के स्थान में उन पदों के ऊपर एक लम्बी रेखा खींच देते हैं। इसे 'रेखा कोष्ठक' कहते हैं।

उदाहरणतः $a+\overline{b-c}$ में व्यंजक $b-c$ कोष्ठक में है।

कोष्ठक खोलने के नियम

पहला नियमः—

यदि कोष्ठक से पहले + का चिन्ह हो, तो कोष्ठक के बीच वाले पदों के चिन्हों में कोई परिवर्तन किये बिना कोष्ठक खोला जा सकता है।

दूसरा नियमः—

जब कोष्ठक के पहले − का चिन्ह हो तो कोष्ठक खोलने की विधि यह है कि कोष्ठक के भीतर के सब चिन्हों को बदल दिया जाय, और कोष्ठक खोल दिया जाय।

नोटः—यदि एक से अधिक कोष्ठकों का प्रयोग किया गया हो तो यह रीति लाभदायक होगी कि सबसे पहले अन्दर वाले कोष्ठकों को खोला जाय।

उदाहरण (१) $(12-3)-(8-4)$

$$=12-3-8+4=12+4-3-8$$
$$=16-11=5$$

उदाहरण (२) $3x-[2y-\{7z-(3y-2x)\}]$

$$=3x-[2y-\{7z-3y+2x\}]$$
$$=3x-[2y-7z+3y-2x]$$
$$=3x-2y+7z-3y+2x$$
[illegible]

नोट—(१) यदि कहीं रेखा-कोष्ठक हो तो सबसे पहले उसे खोला [illegible]।

(२) कोष्ठक खोलने के पश्चात् सजातीय [illegible] करने से पहले [illegible] पदों को इकट्ठा कर लेना चाहिए

उदाहरण ३. [illegible]

[illegible]

सकता कि गुणन करते समय a का घातांक b के घातांक में जोड़ दिया जाय।

नोट—(२) यहां हम यह मान लेते हैं कि जब m और n भिन्नात्मक या ऋणात्मक हों तो भी घातांक नियम भंग नहीं होता।

उदाहरण (१) $2a^2 \times 3a^3 = 2 \times 3 \times a^2 \times a^3$
$= 6 \times a^{2+3}$
$= 6 \times a^5$
$= 6a^5$ उत्तर

उदाहरण (२) $3x^2y \times 4xy^2 = 3 \times 4 \times x^2 \times x \times y^2 \times y$
$= 12x^{2+1} \times y^{2+1}$
$= 12x^3 \times y^3$
$= 12x^3y^3$ उत्तर

उदाहरण (३) $4xyz^2 \times 6xy^2z \times 6x^2yz$
$= 4\ 5\ 6.x.x.x.^2\ y\ y^2.y\ z^2.z.z$
$= 120x^{1+1+2}\ y^{1+2+1}y^{2+1+1}$
$= 120x^4y^4z^4$ उत्तर

एकपदी व्यंजकों का गुणन

ऊपर जो उदाहरण दिये गये हैं उन से एकपदी व्यंजकों का गुणनफल निकालने की यह रीति प्राप्त हुई—

(१) संख्यात्मक गुणकों का आपस में गुणन करके जो गुणनफल प्राप्त हो, लिख लो।

(२) इसके पश्चात भिन्न भिन्न व्यंजकों में जो अक्षर हों उन में से कोई सा एक अक्षर लिख लो; और सारे व्यंजकों में उस अक्षर के जो जो घातांक हों उन सब को जोड़ कर उस अक्षर का घातांक लिख दो। फिर दूसरे तीसरे आदि सब अक्षरों के साथ

(४) यदि ऋणात्मक एकपदी व्यंजकों की संख्या विषम हो, तो गुणनफल में पहले ऋण चिन्ह लिख दो अन्यथा धन चिन्ह लिखो।

उदाहरण (१) $+3a^2bc, -4ab^2c, 5abc^2$ का गुणनफल प्रतीत करो।

$$3 \times 4 \times 5 = 60$$
$$a^2 . a . a = a^4$$
$$b . b^2 . b = b^4$$
$$c . c . c^2 = c^4$$

केवल एक व्यंजक के पहले ऋण चिन्ह है,

$\therefore$ गुणनफल $= -60\, a^4 b^4 c^4$ उत्तर

उदाहरण (२) $x^2, -7xy, -12y^3, -3xy, -4x^2$ और $5y^2$ का गुणन करो।

गुणनफल $= (1)(-7)(-12)(-3)(-4)(+5)\, x^2 . x . x . x^2 . y . y^3 . y . y^2$.

$= 5040\, x^6 y^6$ उत्तर।

इस उदाहरण में ऋण चिन्ह चार बार आया है और 4· सम संख्या है, इस लिए गुणनफल के पहले धन चिन्ह होगा, जो छोड़ दिया गया है।

प्रश्नावली ५

गुणा करोः—

(१) $2a$ को 3 से। (२) $3a$ को 3 से।

(३) $-2a$ को 4 से। (४) a को $2a^2$ से।

(५) $-2a^2$ को [illegible] से। (६) $-3ab$ को $2ab$ से।

(७) $3a$ को $4a$ से। (८) $-5a$ को $2a$ से।

(९) $-5a$ को $3a$ से। (१०) $7x^2$ को $2x$ से।

(११) abc को abc से । (१२) a^2b को $-b^2c$ से ।

(१३) $-a^3$ को x^3 से । (१४) $-2a^2$ को $-3ab$ से ।

(१५) $4x^3$ को $-2x^2$ से । (१६) p^{11} को $-p^3$ से ।

(१७) $-p^2q$ को $-pq^2$ से । (१८) $-3p^4q$ को $2pq^4$ से ।

(१९) $a^2b^3c^4$ को ab^2c^3 से । (२०) $\frac{1}{2}a$ को $\frac{1}{3}b$ से ।

किसी संयुक्त व्यंजक का एकपदी व्यंजक से गुणन करना ।

जब किसी संयुक्त व्यंजक को एकपदी व्यंजक से गुणा किया जाता है, तो संयुक्त व्यंजक के एक एक पद को एकपदी व्यंजक से गुणा किया जाता है, आंशिक गुणनफलों के पहले उचित चिन्ह (+ या—) लगा कर उन सब को योग देने से गुणनफल प्राप्त हो जाता है ।

नोट—$(a-b)\,m = am - bm$, इसमें यदि $b=a$,

तो गुणनफल $(a-a)\,m = am - am = 0$ होगा ।

$\therefore 0 \times m = 0$

अतः यदि किसी राशि को शून्य से गुणन किया जाय तो गुणनफल शून्य होता है ।

उदाहरण (१) a^2+b^2 का ab से गुणन करो ।

$(a^2+b^2)\,ab = a^2\,(ab) + b^2\,(ab)$

$= a^3b + ab^3$ उत्तर

उदाहरण (२) $a^2b - 3ab^2$ का $(-2a^2b^2)$ से गुणन करो ।

$(a^2b - 3ab^2)\,(-2a^2b^2)$

$= a^2b\,(-2a^2b^2) - 3ab^2\,(-2a^2b^2)$

$= -2a^4b^3 + 6a^3b^4$ उत्तर

उदाहरण (३) $4a^4 - 6a^3b + 8a^2b^2 - 6ab^3 + 4b^4$ को $\frac{1}{2}a^2b$ से गुणा करो ।

गुणन की क्रिया इस प्रकार लिखी जा सकती है —

$4a^4 - 6a^3b + 8a^2b^2 - 6ab^3 + 4b^4$

[illegible]

[illegible] उत्तर

करो और जो जो फल प्राप्त हों उनके पहले उचित चिन्ह (+ या −) लगा कर सब को जोड़ लो, तो पूरा गुणनफल प्राप्त हो जायगा।

उदाहरण (1) $3x^2-4xy$ को $2x^2+3y^2$ से गुणा करो।

गुणनफल $=(3x^2-4xy)(2x^2+3y^2)$

$=3x^2 . 2x^2+3x^2 . 3y^2-4xy . 2x^2-4xy\,3y^2$

$=6x^4+9x^2y^2-8x^3y-12xy^3$ उत्तर

उदाहरण (२) a^2+b^2 को a^2-b^2 से गुणा करो।

गुणनफल $=(a^2+b^2)(a^2-b^2)=a^2a^2-a^2b^2+b^2a^2-b^2b^2$

$=a^4-b^4$ उत्तर

गुणन की क्रिया इस प्रकार भी लिखी जा सकती है:—

$$\begin{array}{r} a^2+b^2 \\ a^2-b^2 \\ \hline a^4+a^2b^2 \\ -a^2b^2-b^4 \\ \hline a^4 \qquad -b^4 \end{array}$$

इसी विधि द्वारा ऐसे व्यंजकों का भी गुणन किया जा सकता है जिनमें दो से अधिक पद हों।

तुम जानते हो कि,

$(a+b+c)\,m=am+bm+cm$

अब यदि $m=x+y$, तो

$(a+b+c)(x+y)=a(x+y)+b(x+y)+c(x+y)$

$=ax+ay+bx+by+cx+cy.$

देखो इस उदाहरण में पहले व्यंजक के प्रत्येक पद को दूसरे व्यंजक के प्रत्येक पद से गुणा किया गया है

और सब आंशिक गुणनफल का जोड़ इन दोनों व्यंजकों का गुणनफल प्राप्त हुआ है

से गुणा करके दूसरी पंक्ति के नीचे इस प्रकार लिखा कि सजातीय पद एक दूसरे के ठीक नीचे हों।

उदाहरण (४) $3x-2x^2+4-x^3$ का $2+x^2-x$ से गुणन करो।

दोनों व्यंजकों को x के घातों के आरोह क्रम में सजाया—

$$\begin{array}{rl} & 4+3x-2x^2-x^3 \\ & 2-x+x^2 \\ \hline 2 \text{ से गुणन} = & 8+6x-4x^2-2x^3 \\ -x \text{ से गुणन} = & \quad -4x-3x^2+2x^3+x^4 \\ +x^2 \text{ से गुणन} = & \quad\quad +4x^2+3x^3-2x^4-x^5 \\ \hline \text{पूरा गुणनफल} = & 8+2x-3x^2+3x^3-x^4-x^5 \end{array}$$

प्रश्नावली ७

गुणा करो :—

(१) $1+a+a^2$ को $1-a$ से।

(२) $1-a+a^2$ को $1+a$ से।

(३) a^2+ab+b^2 को $a+b$ से।

(४) a^2-ab+b^2 को $a-b$ से।

(५) $a^4+a^2b^2+b^4$ को a^2-b^2 से।

(६) $a^4-a^2b^2-b^4$ को a^2+b^2 से।

(७) $7a^2-12ab+9b^2$ को $3a^2-4b^2$ से।

(८) $\frac{1}{2}x^2+xy-\frac{1}{3}y^2$ को $\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y$ से।

(९) $6x^2+3xy+4y^2$ को $2x^2+$ [illegible] $xy-3y^2$ से।

(१०) $7x^4$ [illegible] $2x^3y$ [illegible] xy^3 [illegible] $4y^4$ को [illegible] $4xy+y^2$ से।

(११) x^2-xy+y^2 को x^2 [illegible] $x+y$ से।

(१२) [illegible] y^2+z^2-xyz को x [illegible] $y+z$ से।

$x^5 \div x^2 = x.x.x.x.x \div (x.x)$
$= x.x.x.x.x \div x \div x$
$= x.x.x = x^3 = x^{5-2}$

इसी प्रकार,
$x^7 \div x^4 = x^3$
$x^m \div x^n = x^{m-n}$

अतः यदि एक ही राशि के दो घातों को एक दूसरे से भाग दिया जाय, तो भजनफल का घात भाज्य और भाजक के घातों के अन्तर के बराबर होता है।

(३) सिद्ध करो कि $x^0 = 1$

$x^m \div x^m = 1$
परन्तु $x^m \div x^m = x^{m-m} = x^0$
$\therefore \quad x^0 = 1$

(४) यदि हमें $x \times y$ को y से भाग देना हो, तो भाग की परिभाषा के अनुसार,

$x \times y \div y = x$

$\therefore$ यदि $x \times y$ को y से भाग दिया जाय तो भजनफल x होता है।

इससे यह प्रगट हुआ कि यदि भाजक, भाज्य का एक गुणक हो तो भाज्य में से वह गुणक काट कर उचित चिन्ह लगा देने से भजनफल प्राप्त हो जावेगा।

उदाहरण (१) $5x^2$ को 5 से भाग करो।
स्पष्ट है कि भजनफल x^2 होगा।

उदाहरण (२) $5x^2$ को x से भाग करो।
भजनफल [illegible]

उदाहरण [illegible] को [illegible] से भाग करो।
भजनफल [illegible]

उदाहरण (४) x^5 को x^2 से भाग करो।

यहाँ $x^5=x^3\times x^2$

$\therefore$ भजनफल$=x^3$

उदाहरण (५) $9x^4y^3$ को $3x^2y$ से भाग करो।

$$\frac{9x^4y^3}{3x^2y}=\frac{3x^2y\times 3x^2y^2}{3x^2y}=3x^2y^2$$

उत्तर

ऊपर दिये हुए उदाहरणों से यह परिणाम निकलता है कि ज किसी एकपदी व्यंजक को दूसरे एकपदी व्यंजक से भाग दिया जा तो भाज्य और भाजक के सार्वगुणक आपस में कट जाते हैं।

प्रश्नावली ८ (मौखिक)

भाग दो :—

(१) $3x$ को 3 से।

(२) $3x$ को x से।

(३) $-3x$ को -3 से।

(४) $-3x$ को 3 से।

(५) $7abc$ को $7a$ से।

(६) $7abc$ को $-7a$ से।

(७) a^2 को a से।

(८) a^2 को $-a$ से।

(९) $-a^2$ को a से।

(१०) $-a^2$ को $-a$ से।

(११) a^5 को a^2 से।

(१२) $-a^4$ को a^3 से।

(१३) a^3 को a^2 से।

(१४) a^3 को $-a^3$ से।

(१५) $24x^4$ को $6x^2$ से।

(१६) $21x^3$ को $-7x$ से।
(१७) $8a^3$ को $-4a^2$ से।
(१८) $-6xy$ को $-2x$ से।
(१९) $7a^2b^4$ को $-ab$ से।
(२०) $-a^4b^7$ को $-a^2b^2$ से।
(२१) $-54a^2bc$ को $6abc$ से।
(२२) $16a^2b^2c^2$ को $4abc$ से।
(२३) $-21a^3x^4$ को $7a^2x$ से।
(२४) $63a^5b^4c^7$ को $-7ab^2c^2$ से।

(५) किसी व्यंजक का ऐसे व्यंजक से भाग करना, जिसमें दो या दो से अधिक पद हों

ऐसे प्रश्नों में हमें भाज्य के पदों के कई एक ऐसे पुंज बनाने पड़ते हैं जिन्हें भाजक से भाग करने पर कुछ न बचे। इसके पश्चात् सब आंशिक भजनफलों को योग देकर पूर्ण भजनफल प्राप्त कर लेते हैं।

उदाहरण (१) $x^2+2xy+y^2$ को $x+y$ से भाग दो।

$x^2+2xy+y^2=x^2+xy+xy+y^2$

परन्तु $\frac{x^2+xy}{x+y}=x$, और $\frac{xy+y^2}{x+y}=y$

$\therefore \frac{x^2+2xy+y^2}{x+y}=x+y$ उत्तर

यह क्रिया इस प्रकार भी लिखी जा सकती है:—

$$x+y)\ x^2+2xy+y^2\ (x+y$$
$$x^2+xy$$
$$xy+y^2$$
$$xy+y^2$$
$$\times$$

इससे भाग करने की निम्नलिखित रीति निकल आई:—

(१) भाज्य और भाजक को किसी ऐसे अक्षर के घातों के अवरोह क्रम में सजाओ जो दोनों व्यंजकों में वर्तमान हो।

(२) भाज्य के पहले पद को भाजक के पहले पद से भाग करके जो पद प्राप्त हो उसे भजनफल के पहले पद के रूप में लिखो।

(३) भजनफल के इस पहले पद से भाजक का गुणन करो और जो गुणनफल प्राप्त हो उसे भाज्य में से घटा दो।

(४) जो कुछ बचे उसमें भाज्य के शेष पदों में से एक या दो पद जोड़ दो और इस प्रकार जो व्यंजक बने उसे पहले की तरह भाग करो।

(५) यह क्रिया उस समय तक करते रहो जब तक कुछ शेष न रहे, या शेष का घात भाजक के घात से छोटा हो जाय।

उदाहरण (२) a^3-3a^2+a-3 को $a-3$ से भाग दो।

$$a-3)\ a^3-3a^2+a-3\ (a^2+1$$
$$\underline{a^3-3a^2}$$
$$a-3$$
$$\underline{a-3}$$
$$\times$$

उदाहरण (३) x^3+a^3 को $x+a$ से भाग दो।

$$x+a)\ x^3 \qquad +a^3\ (x^2-ax+a^2$$
$$x^3+ax^2$$
$$ax^2$$
$$-ax^2\quad a^2x$$
$$a^2x\ \ a^3$$
$$\times$$

नोट—देखो भाज्य में x^2 और x वर्तमान नहीं हैं, इस लिये उनके स्थान खाली छोड़ कर a^3 को कुछ दूरी पर लिखा गया है।

उदाहरण (४) $x^3-3a^2x+2a^3$ को $x+2a$ से भाग दो।

$$
\begin{array}{l}
x+2a)\ x^3-3a^2x+2a^3\ (x^2-2ax+a^2 \\
\quad x^3+2ax^2 \\
\quad\quad -2ax^2-3a^2x \\
\quad\quad \underline{-2ax^2-4a^2x} \\
\quad\quad\quad a^2x+2a^3 \\
\quad\quad\quad \underline{a^2x+2a^3} \\
\quad\quad\quad\quad \times
\end{array}
$$

उदाहरण (५) $p^2-6p-(q^2-4q-5)$ को $p+q-5$ से भाग करो।

$$
\begin{array}{l}
p+q-5)\ p^2\quad -6p-q^2+4q+5\ (p-q-1 \\
\quad \underline{p^2+pq-5p} \\
\quad\quad -pq-p-q^2+4q \\
\quad\quad \underline{-pq\quad -q^2+5q} \\
\quad\quad\quad -p\quad -q+5 \\
\quad\quad\quad \underline{-p\quad -q+5} \\
\quad\quad\quad\quad \times
\end{array}
$$

प्रश्नावली ९

इनका भजनफल प्रतीत करो—

(१) $(x^2+10x+21)\div(x+3)$

(२) $(20x^2+67x+56)\div(4x+7)$

(३) $(x^2-5x+6)\div(x-2)$

(४) $(y^2-7y+12)\div(y-3)$

(५) $(x^2-7x+10)\div(x-5)$

(६) $(15x^2-61x+56)\div(5x-7)$

(७) $(6p^2-p-15)\div(2p+3)$

(८) $(35x^2+24x-35)\div(7x-5)$

(९) $(9p^2-4q^4)\div(3p+2q^2)$

(१०) $(x^3+3x^2+3x+1)\div(x+1)$

(११) $(x^3-3x^2+3x-1)\div(x-1)$

(१२) $(3x^3+4x^2-10x-7)\div(3x+7)$

(१३) $6a^4-a^3+5a-6\div4a^3+3a^2-2+a$

(१४) $a^4-4a^3-18a^2-11a+2\div a^2-7a+1$

(१५) $12a^4+a^3-8a^2+7a-2\div3a^2-2a+1$

(१६) $2a^4+a^2-3a^3-9+9a\div2a^2-3+a$

(१७) $4x-1-8x^3-6x^4-11x^2\div1-x-3x^2$

(१८) $3-a^2-14a-4a^3+a^4-a\div3+a^2$

(१९) $1+a+a^2+a^3+a^4+a^5\div1+a^2+a^4$

(२०) $3x^5+3x^4+2x^3+1\div3x^2-x+1$

दूसरा अध्याय

सरल गुणनखण्ड
EASY FACTORS

(1) जब कोई बीजीय व्यंजक दो या दो से अधिक राशियों का गुणनफल होता है, तो उनमें से हर एक राशि को उस व्यंजक का गुणनखण्ड कहते हैं।

किसी व्यंजक के गुणनखण्ड निकालने का यह अर्थ होता है कि जिन राशियों का परस्पर गुणन करने से व्यंजक प्राप्त होता है, उन राशियों को मालूम करना।

एकपदी व्यंजकों के गुणनखण्ड

गुणनखण्ड की परिभाषा के अनुसार जिन जिन राशियों का गुणन करने से दिया हुआ व्यंजक प्राप्त हो, वे सब राशियां उस व्यंजक के गुणनखण्ड कहलाते हैं।

ab के गुणनखंड हैं a, b

abc के गुणनखंड हैं a, b, c

ab^2c के गुणनखंड हैं a, b, b, c

$2x^2yz$ के गुणनखंड हैं $2, x, x, y, z,$

$-8x^2y^2z$ के गुणनखंड हैं $-1, 2, 2, 2, x, x, y, y, z$

$ak+bk$ के गुणनखण्ड

हम जानते हैं कि $(a+b)k = ak+bk$

$\therefore$ $ak+bk$ के गुणनखण्ड k और $(a+b)$ हैं।

इसी प्रकार [illegible] के गुणनखण्ड [illegible] और [illegible] हैं।

और [illegible] के गुणनखण्ड [illegible] और [illegible] हैं।

प्रश्नावली १०

गुणनखण्ड निकालो :—

(१) $3ab+7a^2$

(२) $5x^2-15xy$

(३) $12a^2x^2-2ax^2+4a^2x$

(४) $6pq+21pr$

(५) $3ab-3da$

(६) $5x^2y^2-10x^2y-15xy^2$

(७) $4m^3n-8m^2n^2+4mn^3$

(८) $a^2bc+ab^2c-abc^2$

(९) $6a^2pq-10a^2pr+2a^2ps$

(१०) $7x^4y-14x^2y^2-7xy^4$

(११) $ax^5-bx^4-cx^3$

(१२) $15abx^2+10abx-25abxy^2$

(१३) $a^2bc^2-a^2bc^3+a^2b^2c^2$

(१४) $6p^2q^2-3p^3q-3pq^3$

(१५) $3mp+2mp^2-5m^2p^2$

(१६) $14a^2b^2-42a^2bc+14a^2b$

(१७) $6x^3y^4-2x^2y^2+4x^4y$

(१८) $a^2bc^2-abc^3+ab^2c^2-a^2b^2c$

(१९) $3x^2yz-3x^2y^2z-3x^2yz^2$

(२०) $\frac{1}{4}abc+\frac{1}{3}a^2c+\frac{1}{2}ac^2$

(२१) $2a^2b-4ab^2c+2a^2c^2+2a^2c$

(२२) $2x^4y^4z^2-3x^4y^3z^5$

(२३) $50a^2x^2-125ax^2-75a^2x$

(२४) $3p^4qr^2-6p^3r^3-9p^2q^2r$

वर्ग उठाना

दो संख्याओं के योगफल का वर्ग

कल्पना करो कि a और b दो संख्याएं हैं, और $(a+b)$ का

र्ग उठाना है।

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)$$
$$=a(a+b)+b(a+b)$$
$$=a^2+ab+ab+b^2$$
$$=a^2+2ab+b^2$$

अतः $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$

परिणाम

दो संख्याओं के योगफल का वर्ग = पहली संख्या का वर्ग
+ दूसरी संख्या का वर्ग
+ दोनों संख्याओं के गुणनफल का दुगना।

दि $a=10$ और $b=3$,

$$(a+b)^2=(10+3)^2=10^2+3^2+3\times10\times2$$
$$=100+9+60$$
$$=169 \text{ उत्तर}$$

रण (१) $(2a+3b)$ का वर्ग उठाओ।

$$(2a+3b)^2$$
$$=(2a)^2+(3b)^2+2\times2a\times3b$$
$$=4a^2+9b^2+12ab \quad \text{उत्तर}$$

ण (२) $(126)^2$ का मूल्य प्रतीत करो।

$$(126)^2=(120+6)^2$$
$$=(120)^2+(6)^2+2\times120\times6$$
$$=14400+36+1440$$
$$=15876 \text{ उत्तर}$$

ी.— प्रश्नावली ११

(२) $3x+7b$

(४) $3+4p$

(५) $3ab+4b^2$ (६) $8a^2+3ab$

(७) $9ax+4y^2$ (८) m^2+n^2

(९) $px+qy$ (१०) p^2+pq^2

(११) $2a^2b+3ab^2$ (१२) $a+(-b)$

नीचे लिखे पूर्ण वर्गों में छूटे हुए पद लिखो:—

(१३) $16x^2+(\quad)+40y^2$

(१४) $36m^2+60mn+(\quad)$

(१५) $(\quad)+112pq+64p^2$

(१६) $121a^2+(\quad)+81$

(१७) $144m^2+72m+(\quad)$

(१८) $(\quad)+104p+169$

बीजगणित द्वारा मूल्य प्रतीत करो

(१९) $(302)^2$ (२०) $(405)^2$

(२१) $(703)^2$ (२२) $(806)^2$

(२३) $(611)^2$ (२४) $(1001)^2$

दो संख्याओं के अन्तर का वर्ग

कल्पना करो कि a और b दो संख्या हैं, और हम उनके अन्तर का वर्ग प्रतीत करना चाहते हैं।

$$(a-b)^2=(a-b)(a-b)$$
$$=a(a-b)-b(a-b)$$
$$=a^2-ab-ab+b^2$$
$$=a^2-2ab+b^2$$

इस लिए $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$

हम परिणाम को शब्दों में इस प्रकार लिख सकते हैं:—

दो संख्याओं के अन्तर का वर्ग = पहली संख्या का वर्ग
+ दूसरी संख्या का वर्ग
दोनों संख्याओं के
गुणनफल का दुगना

यह तो तुम जानते हो कि :—

$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

और $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

उदाहरण (१) $a^2+14a+49$ के गुणनखण्ड बनाओ :—

$a^2+14a+49=a^2+2(a\times 7)+7^2$

$=(a+7)^2$ उत्तर

उदाहरण (२) $4x^2+12xy+9y^2$ के गुणनखण्ड बनाओ :—

यह व्यंजक $=(2x)^2+2(2x)(3y)+(3y)^2$

$=(2x+3y)^2$ उत्तर

उदाहरण (३) $x^6-6x^4yz+9x^2y^2z^2$ के गुणनखण्ड बनाओ :—

यह व्यंजक $=x^2\{x^4-6x^2yz+9y^2z^2\}$

$=x^2\{(x^2)^2-2(x^2)(3yz)+(3yz)^2\}$

$=x^2(x^2-3yz)^2$

$=\{x(x^2-3yz)\}^2$ उत्तर

प्रश्नावली १३

गुणनखण्ड बनाओ :—

(१) $4a^2+28a+49$

(२) $25p^2-30p+9$

(३) $25a^2+40ab+16b^2$

(४) $49m^2-56mn+16n^2$

(५) $36a^2+60ab+25b^2$

(६) $36a^2-84ab+49b^2$

(७) $49a^2+42ab+9b^2$

(८) $25x^2-60xy+36y^2$

(९) $16x^2+56xy+49y^2$

(१०) $81a^2-126ab+49b^2$

(११) $81x^2+90xy+25y^2$

(१२) $9m^2-66mn+121n^2$

उदाहरण (२)

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ की सहायता से $(256)^2-(244)^2$ मूल्य मालूम करो :—

क्रिया

$$(256)^2-(244)^2$$
$$=(256+244)(256-244)$$
$$=(500)(12)=6000 \quad \text{उत्तर}$$

उदाहरण (३)

$\frac{\cdot727+\cdot727-\cdot273+\cdot273}{\cdot727-\cdot273}$ का मूल्य मालूम करो :—

क्रिया $\qquad \frac{\cdot727\times\cdot727-\cdot273\times\cdot273}{\cdot727-\cdot273}$

$$=\frac{(\cdot727)^2-(\cdot273)^2}{\cdot727-\cdot273}=\frac{(\cdot727+\cdot273)(\cdot727-\cdot273)}{\cdot727-\cdot273}$$
$$=1\cdot000$$
$$=1 \quad \text{उत्तर}$$

प्रश्नावली १४

गुणनफल बताओ :—

(१) $(a+b)(a-b)$ (२) $(y+9)(y-9)$

(३) $(2y-b)(2y+b)$ (४) $(4a-3b)(4a+3b)$

(५) $(5x-3y)(5x+3y)$ (६) $(7x-4)(7x+4)$

(७) $(ab+5)(ab-5)$

(८) $(ab+2c)(ab-2c)$

(९) $(ab-cd)(ab+cd)$

(१०) $(7a-4b)(7a+4b)$

बीजगणित की रीति से मूल्य मालूम करो :—

(११) $(31)^2-(27)^2$ (१२) $(71)^2-(29)^2$

(१३) $(57)^2-(43)^2$ (१४) $(134)^2-(130)^2$

[illegible]

सरल करो:—

(१७) $(x^2+7)(x^2-7)$

(१८) $(ax+by)(ax-by)$

(१९) $(a+b)(a-b)+(b+c)(b-c)$

(२०) $(x+2)(x-2)-(x+3)(x-3)$

(२१) $(2x+3)(2x-3)+(4x+3)(4x-3)$

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ की सहायता से निम्नलिखित मूल्य प्रतीत करो:—

(२२) $(567)^2-(432)^2$

(२३) $(765)^2-(545)^2$

(२४) $(1527)^2-(1521)^2$

(२५) $(5662)^2-(5657)^2$

(२६) $\dfrac{\cdot568 \times \cdot568 - \cdot432 \times \cdot432}{\cdot568 - \cdot432}$

(२७) $\dfrac{2\cdot31 \times 2\cdot31 - 1\cdot69 \times 1\cdot69}{2\cdot31 - 1\cdot69}$

(२८) $\dfrac{55\frac{1}{2} \times 55\frac{1}{2} - 44\frac{1}{2} \times 44\frac{1}{2}}{55\frac{1}{2} - 44\frac{1}{2}}$

(२९) $\dfrac{(174\frac{1}{2})^2 - (137\frac{1}{2})^2}{312}$

(३०) [illegible]

अब तुम जान गये कि $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ [illegible]

इस [illegible] द्वारा गुणनखण्ड करते हैं [illegible] उदाहरण [illegible] जाते हैं

उदाहरण [illegible]

उदाहरण [illegible]

उदाहरण (३) $25x^2-9y^2$

$=(5x)^2-(3y)^2$

$=(5x+3y)(5x-3y)$

उदाहरण (४) $(10)^2-(7)^2$

$=(10+7)(10-7)$

$=17\times3$

$=51$

उदाहरण (५) 25^2-24^2

$=(25+24)(25-24)=(49)(1)$

$=49$

प्रश्नावली १५

गुणनफल बनाओ:–

(१) x^2-y^2	(२) $4a^2-b^2$
(३) p^2-9q^2	(४) $4x^2-9y^2$
(५) p^4-4a^2	(६) $36p^2q^2-1$
(७) $4-25m^2$	(८) $9a^2-49$
(९) $100-p^4$	(१०) $(a+b)^2-c^2$
(११) $x^2-(y+z)^2$	(१२) $p^2-(q-r)^2$
(१३) p^2q^4-121	(१४) $x^2-\frac{1}{4}$
(१५) $\frac{1}{16}p^2-q^2$	(१६) $\frac{x^2}{25}-\frac{25}{y^2}$
(१७) $1-144a^4$	(१८) $36x^2-49p^6$
(१९) $10^2p^4-3^2q^2$	(२०) $\frac{1}{121}-x^{10}$

त्रिपद व्यंजकों के गुणनखण्ड बनाने की रीति

x^2+px+q जैसे व्यंजकों के गुणनखण्ड करना।

पहली विधि यह है कि व्यंजकों को दो वर्गों के अन्तर के रू

में प्रकट किया जाय।

उदाहरण (१) $x^2-18x+65$ के गुणनखण्ड बनाओ।

[x^2-18x को पूर्ण वर्ग बनाने के लिए इस में $\frac{18}{2}$ का वर्ग अ[र्थात्]
81 जोड़ना चाहिये।]

$\therefore$ दिया हुआ व्यंजक $=x^2-18x+81-81+65$

$$=(x-9)^2-16$$
$$=(x-9)^2-(4)^2$$
$$=(x-9+4)(x-9-4)$$
$$=(x-5)(x-13)$$

उदाहरण (२) $x^2-3x-28$ के गुणनखण्ड बनाओ।

दिया हुआ व्यंजक $=(x^2-3x+(\frac{3}{2})^2-(\frac{3}{2})^2-28$

$$=(x^2-3x+\tfrac{9}{4})-(\tfrac{9}{4}+28)$$
$$=(x-\tfrac{3}{2})^2-(\tfrac{11}{2})^2$$
$$=(x-\tfrac{3}{2}+\tfrac{11}{2})(x-\tfrac{3}{2}-\tfrac{11}{2})$$
$$=(x+4)\ (x-7)\ \text{उत्तर}$$

दूसरी विधि

कल्पना करो कि $x^2+px+q=(x+a)\ (x+b)$,

$$\therefore x^2+px+q=x^2+(a+b)x+ab$$

अतः $p=a+b$ और $q=ab$

इसलिए हमें q के ऐसे दो गुणनखण्ड प्रतीत करने हैं जिन का योग p के बराबर हो।

इसकी व्याख्या नीचे दिये गए उदाहरणों से हो जाती है।

उदाहरण (१) $x^2-9x+18$ के गुणनखण्ड बनाओ।

ऐसी दो संख्याएं प्रतीत करो जिन का गुणनफल 18 हो और योग 9 हो।

स्पष्ट है कि 6 और 3 ऐसी संख्याएं हैं। अब इस व्यंजक बीच वाले पद के स्थान पर $6x+3x$ लिख लो।

$\therefore$ दिया हुआ व्यंजक $=x^2+6x+3x+18$

$$=x(x+6)+3(x+6)$$

$$=(x+6)(x+3) \quad \text{उत्तर}$$

उदाहरण (५) $a^2-16ab+63b^2$ के गुणनखण्ड बनाओ।

ऐसी दो संख्याएँ जिन का गुणनफल 63 हो और योगफल 16, 9 और 7 हैं।

अब $-16ab$ के स्थान पर $-9ab-7ab$ लिख दो।

$\therefore$ दिया हुआ व्यंजक $=a^2-9ab-7ab+63b^2$

$$=a(a-9b)-7b(a-9b)$$

$$=(a-9b)(a-7b) \quad \text{उत्तर}$$

ऊपर उदाहरण (३) और (४) से इस नमूने के व्यंजकों के गुणनखण्ड करने की यह विधि प्राप्त होती है।

(१) यदि व्यंजक का तीसरा पद धनात्मक हो, तो उस पद के संख्यात्मक गुणक के दो ऐसे गुणनखण्ड बनाओ जिनका योग बीच वाले पद के संख्यात्मक गुणक के बराबर हो।

(२) अब यदि बीच वाला पद धनात्मक हो तो उसके दोनों टुकड़े धनात्मक होंगे।

(३) यदि बीच वाला पद ऋणात्मक हो तो उसके दोनों टुकड़े ऋणात्मक होंगे।

(४) इसके पश्चात् वही क्रिया करो जो [illegible] नमूने के व्यंजकों के लिए बताई गई है।

उदाहरण [illegible] के गुणनखण्ड बनाओ।

[illegible]

प्रश्नावली १६

नीचे दिये हुये त्रिपद व्यजकों के गुणनखण्ड करो:—

(१) $x^2+13x+42$
(२) $a^2-18a+65$
(३) $x^2+18x+65$
(४) $p^2-15p+54$
(५) $x^2+18x+72$
(६) $x^2+20x+91$
(७) $x^2-22x+117$
(८) $x^2+21x+104$
(९) $a^2+5a-104$
(१०) $x^2+21x+108$
(११) $a^2+3a-108$
(१२) $x^2+27x+180$
(१३) $p^2+p-156$
(१४) $a^2-3a-180$
(१५) $a^2-2a-143$
(१६) $a^2-a-240$
(१७) $x^2+8x-105$
(१८) $a^2-26a-120$
(१९) $1-19x+60x^2$
(२०) $1-49a-102a^2$

ax^2+bx+c, जैसे व्यंजकों के गुणनखंड करना

इस प्रकार के व्यंजक और इससे पहले नमूने के व्यंजक में एक ही भेद है, और वह भेद यह है कि इस नमूने में x^2 का गुणक भी वर्तमान है।

ऐसे व्यजक के गुणनखंड करते समय नीचे दी हुई विधि से काम लो:—

पहले पद और तीसरे पद के संख्यात्मक गुणकों का गुणन करो। जो गुणनफल प्राप्त हो उसके दो ऐसे गुणनखंड बनाओ जिन का बीजीय योग बीच वाले पद के संख्यात्मक गुणक के बराबर हो। शेष क्रिया वैसी ही है जैसी पहले बता चुके हैं।

उदाहरण (1) गुणनखण्ड करो।

$$7x^2-25x+12$$

$7\times12=84,\ 21\times4=84,\ -21-4=-25$

दिया हुआ व्यंजक $=7x^2-21x-4x-12$

$=7x(x-3)-4(x-3)$

$=(x-3)(7x-4)$ उत्तर

उदाहरण (२) गुणनखण्ड करो।

$7x^2-25x-12$

$7\times-12=-84, -28\times3=-84, -28+3=-25$

दिया हुआ व्यंजक $=7x^2-28x+3x-12$

$=7x(x-4)+3(x-4)$

$=(x-4)(7x+3)$ उत्तर

उदाहरण (३) $20(1+x^2)-41x$ के गुणनखण्ड करो।

$20(1+x^2)-41x=20+20x^2-41x$

$=20x^2-41x+20$

$[20\times20=4\times5\times4\times5=4\times4\times5\times5=16\times25]$

∴ दिया हुआ व्यंजक $=20x^2-16x-25x+20$

$=4x(5x-4)-5(5x-4)$

$=(5x-4)(4x-5)$ उत्तर

उदाहरण (४) $x^2+40x-391$ के गुणनखण्ड करो।

अब 391 के ऐसे दो गुणनखण्ड बताओ जिनका योगफल 40 हो; यह आसान नहीं है। ऐसी अवस्था में इस उपसिद्धान्त से काम लो।

$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

यहाँ $ab=391$ और $a-b=40$

$(a-b)^2=40^2=1600$

और $-4ab=-4\times391=-1564$

अब [illegible]

[illegible]

अब $a+b \quad =40$

और $a-b \quad =6$

स्पष्ट है कि $a=23$ और $b=17$

$\therefore x^2+40x+391=x^2+23x+17x+391$

$=x(x+23)+17(x+23)$

$(x+23)(x+17)$ उत्तर

उदाहरण (५) $x^2-14x-851$ के गुणनखण्ड करो।

अब हमें 851 के ऐसे दो गुणनखण्ड मालूम करने हैं जिनका अन्तर 14 हो।

मान लो कि वे गुणनखण्ड a और b हैं

तो $a-b=14$ और $ab=851$

अब $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$

$\therefore (a+b)^2=(14)^2+4\times 851$

$=196+3404$

$=3600$

$\therefore a+b=60$

और $\quad a-b=14$

$\therefore a \quad =37, b=23$

अब दिया हुआ व्यंजक $=x^2-37x+23x-851$

$=x(x-37)+23(x-37)$

$=(x-37)(x+23)$ उत्तर

प्रश्नावली १७

गुणनखण्ड करो:—

(१) $6x^2-7x-20$

(२) $40x^2-67x+28$

(३) $6x^2-x-40$

(४) $15x^2-26x+7$

(५) $44x^2-45x+9$
(६) $9x^2-82x+9$
(७) $56x^2+15x-56$
(८) $21x^2-47x-24$
(९) $2x^2+7xy+3y^2$
(१०) $6x^2+5xy-21y^2$
(११) $15a^2-ab-6b^2$
(१२) $28p^2-25pq+3q^2$
(१३) $12x^2-17xy+5y^2$
(१४) $10x^2+7xy-12y^2$
(१५) $36a^2+21a-2$
(१६) $12x^2-5xy-77y^2$
(१७) $27c^2-24cd+5d^2$
(१८) $56a^2-3a-9$
(१९) $6a^2+49ab-45b^2$
(२०) $12a^2+11ax-15x^2$

तीसरा अध्याय

सरल समीकरण

Simple Equations of the First Degree

(१) गणित के कई प्रश्न ऐसे होते हैं जिनमें अज्ञात संख्या के स्थान पर कोई अक्षर रख कर क्रिया की जाय तो प्रश्न सुगमता से हल हो जाता है और क्रिया भी बहुत सुथरी और भली दिखाई देती है। उदाहरणतः मान लो कि हमें इस प्रश्न की क्रिया करनी है।

प्रश्न—बताओ, वह कौनसी संख्या है; जिसमें 15 जोड़ें तो योगफल का दुगना 44 के बराबर हो।

इस प्रश्न में यदि हम अज्ञात संख्या को x मान लें, तो यह प्रश्न इस प्रकार होगा :—

$(x+15)$ का दुगना $=44$

अतः स्पष्ट है कि $x+15=44$ के आधे के

$=22$ के

अब 22 ऐसी संख्या है जिस में अज्ञात संख्या और 15 दोनों सम्मिलित हैं, अतः यदि हम इसमें से 15 निकाल दें तो अज्ञात संख्या शेष रह जायेगी।

अतः $x=22-15=7$

इसलिए इष्ट संख्या $=7$ उत्तर

(२) ऊपर लिखी बातों से स्पष्ट है कि हमने अज्ञात संख्या पर इस प्रकार क्रिया की कि एक समानता स्थापित करके अज्ञात अथवा अव्यक्त संख्या प्रगट कर ली। इस सम्बन्ध को बीजगणित में समीकरण कहते हैं।

(३) समीकरणों को हल करने के कुछ नियम तो तुम पहले भी जानते हो। यह नियम बड़े काम के हैं। इसलिए हम इन नियमों को विद्यार्थियों के लाभ के लिए फिर लिखते हैं। नियम यह हैं :—

(क) यदि समान राशियों में समान राशियां जोड़ दी जायें तो उनके योगफल भी समान होते हैं।

जैसे यदि $x=y$,

तो $x+a=y+a$

(ख) यदि समान राशियों में से समान राशियां घटाई जायें तो शेष राशियां आपस में समान होती हैं।

जैसे यदि $x=y$,

तो $x-a=y-a$

(ग) यदि समान राशियों को समान राशियों से गुणा किया जाय तो गुणनफल भी समान होते।

जैसे यदि $x=y$,

तो $ax=ay$

(घ) यदि समान राशियों को एक जैसी राशियों पर भाग दिया जाय, तो भजनफल भी आपस में समान होंगे।

जैसे यदि $ax=ay$,

तो $ax \div a = ay \div a$,

$x=y$

(४) ऊपर लिखे सिद्धान्त (क) और (ख) से समीकरण हल करने का हम को एक बड़ा आवश्यक नियम प्राप्त होता है: और वह नियम यह है

किसी राशि का चिन्ह बदल कर उसको समीकरण के एक पक्ष से दूसरे पक्ष में ले जा सकते हैं

चिन्ह बदलने का अर्थ यह है कि धन राशि का पक्ष बदला जाय तो वह दूसरे पक्ष में आकर ऋण हो जाती है और ऋण राशि दूसरे पक्ष में आकर धन हो जाती है।

जैसे कल्पना करो, कि $x-5=10$

तो $x-5+5=10+5$ सिद्धान्त (क)

$\therefore \quad x=10+5$

$=15$

ऊपर की क्रिया से स्पष्ट है कि (-5) को दाईं ओर से लाया गया तो वह $(+5)$ हो गया और समीकरण में कोई अन्तर नहीं पड़ा।

इसी प्रकार $y+5=10$ को हल करना हो,

तो $y+5-5=10-5$ सिद्धान्त (ख)

$y=10-5$

$=5$

इस उदाहरण को ध्यानपूर्वक देखने से ज्ञात होगा कि $(+5)$ को वाम पक्ष से दक्षिण पक्ष में ले जाया गया तो वह (-5) हो गया और समीकरण में कुछ अन्तर नहीं पड़ा।

इस नियम को पक्षान्तर करना कहते हैं और यह नियम समीकरणों को हल करने में बड़ा लाभदायक है।

(२) यदि किसी समीकरण के दोनों पक्षों की राशियों के चिन्ह बदल दिये जायें, तो समीकरण में कोई अन्तर नहीं आता।

जैसे यदि $a-x=c-d$

तो $x-a=d-c$

(३) यदि समीकरण के दोनों पक्षों का इधर से उधर और उधर ... समीकरण में कोई अन्तर नहीं

जैसे, यदि $a-b=x-c$

तो, $x-c=a-b$

(७) समीकरण हल करने की सब से अच्छी रीति यह है कि पहले ज्ञात राशियों को समीकरण के वाम पक्ष में और अज्ञात राशियों को दक्षिण पक्ष में ले जाओ। फिर हर एक पक्ष की राशियों को जहाँ तक हो सरल कर लो। अन्त में अज्ञात राशि के साथ जो संख्या हो उस पर दोनों पक्षों को भाग दो। इस प्रकार अज्ञात राशि का मूल्य प्रतीत हो जायगा।

(८) अज्ञात राशियों के स्थान पर प्रायः x, y, z, w लिखते हैं पर यह कोई निश्चित नियम नहीं है।

नीचे लिखे उदाहरणों द्वारा समीकरणों को हल करने की रीति प्रतीत हो जायेगी।

उदाहरण (१) हल करो :—

$x-9=3-2x$

यदि $-2x$ वाम पक्ष में लाया जाय तो $+2x$ लिखा जायेगा, और -9 दक्षिण पक्ष में ले जाया जाय तो $+9$ लिखा जायगा।

इस प्रकार $x+2x=3+9$

या $3x=12$

दोनों पक्षों को 3 पर भाग देने से

$x=4$ उत्तर

उदाहरण (२) हल करो $8-7y=10-9y$

पक्षान्तर करने से

$9y-7y=10-8$

$2y=2$

दोनों पक्षों को 2 पर भाग देने से

$y=1$ उत्तर

उदाहरण (३) $4x-3=11-3x$ को हल करो :—

$-3x$ वाम पक्ष में और -3 दक्षिण पक्ष में ले जाने से

$$4x+3x=11+3$$

या $7x=14$

दोनों पक्षों को 7 पर भाग देने से

$x=2$ उत्तर

कुछ समीकरणों के पद भिन्नात्मक होते हैं। ऐसे समीकरणों के दोनों पक्षों को भिन्नों के हरों के लघुतम समापवर्त्य से गुणा कर लो।

उदाहरण (४) हल करो :—

$$\frac{2y-1}{5}+\frac{2y-3}{2}=6$$

[5 और 2 का लघुतम समापवर्त्य $=10$]

दोनों पक्षों को 10 से गुणा किया, तो

$2(2y-1)+5(2y-3)=6\times10$

कोष्ठक खोलने पर,

$4y-2+10y-15=60$

या $14y-17=60$

$14y=60+17=77$

$y=77\div14=5\frac{1}{2}$ उत्तर

उदाहरण (५) हल करो :—

$\frac{1}{11}(4x-3)-[illegible](5x-14)=[illegible](2x-4)[illegible](3x-4)$

11, 2, 7 का लघुतम समापवर्त्य $=231$

दोनों पक्षों को 231 से गुणा किया, तो

[illegible]

या [illegible]

या [illegible]

पक्षान्तर करने से,

$-518x+426x=426-1622$

या $-92x=-1196$ या $92x=1196$

$\therefore \quad x=13$ उत्तर

समीकरणों में दशमलव भिन्न

उदाहरण (१) हल करो :—

$$\frac{x+\cdot15}{\cdot125}-\frac{x-\cdot25}{\cdot25}=3\cdot3$$

$\left(\frac{1}{\cdot25}=4\right.$ और $\left.\frac{1}{\cdot125}=8\right)$

अतः $8(x+\cdot15)-4(x-\cdot25)=3\cdot3$

कोष्ठक खोलने से,

$8x+1\cdot2-4x+1=3\cdot3$

या $4x+2\cdot2=3\cdot3$

पक्षान्तर करने से,

$4x=3\cdot3-2\cdot2=1\cdot1$

$\therefore \quad x=1\cdot1\div4 =\cdot275$ उत्तर

ऐसे समीकरण हल करने के लिये नीचे लिखे हुए परिणाम याद रखने चाहिये।

$\frac{1}{\cdot25}=4, \quad \frac{1}{\cdot125}=8, \quad \frac{1}{\cdot025}=40, \quad \frac{1}{\cdot75}=\frac{4}{3}$

प्रश्नावली १८

हल करो:—

(१) $6x-18=4x-8-3x-5$

(२) $10x-10-6x-27=3$

(३) $6x-18-12x-60=3x-3-8x-17$

(४) $6x-18=4x-8+3x-2$

(२९) $\frac{y+7}{3}-\frac{3y}{5}=y-2-\frac{1}{5}(3y-11)$

(३०) $(x+\frac{1}{2})^2-(x-\frac{3}{2})^2=2x+3$

(३१) $\frac{1}{6}[x-\frac{1}{6}\{x-\frac{1}{6}(x-1)\}]=1$

(३२) $\frac{7x-1}{4}-\frac{1}{3}\left[(2x-\frac{1-x}{2}\right]=6\frac{1}{3}$

(३३) $1{\cdot}4+{\cdot}3x={\cdot}5x-1{\cdot}7$

(३४) ${\cdot}03x+{\cdot}02={\cdot}17-{\cdot}07x$

(३५) ${\cdot}004y+{\cdot}412={\cdot}007y-{\cdot}008$

(३६) $\frac{y}{{\cdot}5}-\frac{y}{{\cdot}75}={\cdot}46$

(३७) $\frac{y}{{\cdot}125}=\frac{y}{{\cdot}75}+20$

(३८) $\frac{y-1}{{\cdot}25}-\frac{y-2}{{\cdot}125}=4{\cdot}2$

(३९) $\frac{2y-3}{2{\cdot}5}=\frac{3y-4}{12{\cdot}5}+{\cdot}24$

(४०) $\frac{{\cdot}25y}{{\cdot}125}=\frac{2y-{\cdot}45}{1{\cdot}25}+{\cdot}6$

सरल समीकरण सम्बन्धी निर्मेय

(१) बीज गणित पढ़ने से अधिकतर यह लाभ होता है कि हम ऐसे प्रश्न हल कर सकते हैं जिनमें कुछ दी हुई बातों के द्वारा अज्ञात राशि या राशियां ज्ञात करनी होती हैं। इस प्रकार के हर एक प्रश्न में कुछ शर्तें दी हुई होती हैं और उनके द्वारा एक या अधिक अज्ञात राशियां मालूम की जाती हैं। हम इन दी हुई शर्तों को बीज गणित के चिन्हों द्वारा प्रकट करते हैं। इस क्रिया से यदि कोई ऐसा समीकरण बने जिसे हल किया जा सकता हो, तो समीकरण को हल करके अज्ञात राशि मालूम हो जाती है।

(२) प्रश्न की शर्तों को बीजीय चिन्हों द्वारा प्रकट करना बहुधा कठिन

(३) अव्यक्त राशियों को x, y, z आदि के बराबर मान लो।

(४) प्रश्न में जो उक्ति दी गई है उसे बीजीय भाषा के अक्षरों और चिन्हों में लिखो। ऐसा करने से एक या एक से अधिक समीकरण बन जायेंगे।

(५) जो समीकरण प्राप्त हो उसे हल करो, और x, y, z आदि का मूल्य निकाल लो। इस प्रकार अव्यक्त राशि या राशियां मालूम हो जायेंगी।

(६) अपने उत्तर को जाँच करो, अर्थात् यह देख लो कि तुम्हारा उत्तर प्रश्न की शर्तों को पूरा करता है या नहीं।

हल किये हुए उदाहरण

उदाहरण (१) एक संख्या दो अंकों की है। यदि दहाई के अंक में से इकाई का अंक घटायें तो 5 बचते हैं और यदि दोनों अंकों के योगफल के पांच गुने को इस संख्या में से घटायें तो ऐसी संख्या बचती है जो असली संख्या के अंकों के स्थान आपस में बदलने से बन जाती है। असली संख्या बताओ।

कल्पना करो कि इकाई अंक $=x$

तो दहाई का अंक $=x+5$,

और संख्या $=10(x+5)+x$,

अब प्रश्न की शर्त के अनुसार,

$$10(x+5)+x-5[(x+5)+x]=10x+x+5$$

या $10x+50+x-10x-25=11x+5$

या $x+25=11x+5$

पक्षान्तर करने से

$x-11x=5-25$

या $-10x=-20$

$\therefore x=2$

अत इकाई का अंक $=2$

और दहाई का अंक $=2+5=7$

इष्ट संख्या $=72$ उत्तर

उत्तर की जांच

$7-2=5$

और $72-5(7+2)=72-45=27$

उदाहरण (२) दो संख्याओं का योगफल 38 है और उनके वर्गों का अन्तर 456 है। वे संख्याएं बताओ

कल्पना करो कि बड़ी संख्या $=x$

तो छोटी संख्या $=38-x$

अब प्रश्न की शर्त के अनुसार

$x^2-(38-x)^2=456$

अब इस समीकरण को हल करते हैं।

$x^2-(38\times38-2\times38\times x+x^2)=456$

या $x^2-1444+76x-x^2=456$

या $76x=456+1444$ (पक्षान्तर करने से)

या $76x=1900$

$\therefore\ x=25$

अतः बड़ी संख्या $=25$

और छोटी संख्या $=38-25=13$

25,13 उत्तर

उदाहरण (३) एक आयत की लम्बाई चौड़ाई से 7 फुट अधिक है। यदि लम्बाई 5 फुट अधिक कर दी जाय और चौड़ाई 3 फुट घटा दी जाय तो उसका क्षेत्रफल 110 वर्गफुट अधिक हो जाता है। आयत की लम्बाई और चौड़ाई बताओ।

कल्पना करो कि चौड़ाई $=$ फुट

तो लम्बाई

यदि उस संख्या में से 18 घटा दिया जाय तो अंकों के स्थान बदल जाते हैं। वह संख्या मालूम करो।

(९) एक संख्या का दहाई का अंक इकाई के अंक से चार गुना है। यदि इकाई और दहाई के अंकों को आपस में बदल दिया जाय तो संख्या में 54 की कमी हो जाती है। संख्या बताओ।

(१०) एक संख्या का दहाई का अंक इकाई के अंक से तिगुना है। यदि इकाई और दहाई के अंकों को आपस में बदला जाय, तो संख्या में 18 की कमी हो जाती है। संख्या ज्ञात करो।

(११) ऐसी दो संख्याएं मालूम करो जिनके वर्गों का अन्तर 1872 हो और उनका योगफल 104 हो।

(१२) ऐसी दो संख्याएं बताओ जिनका योग 15 हो और उनके वर्गों का अन्तर 105 हो।

(१३) 68 रुपये 12 आने 54 बच्चों में इस प्रकार बांटे गये कि प्रत्येक बालक को एक रुपया 6 आने और प्रत्येक बालिका को एक रुपया 2 आने मिले। बालकों की संख्या बताओ।

(१४) 231 रुपये 5 पुरुषों और 6 स्त्रियों में इस प्रकार बांटो कि पुरुष को स्त्री से तीन गुना धन मिले।

(१५) एक मनुष्य ने अपनी सम्पत्ति का $\frac{1}{3}$ भाग बड़े लड़के को, $\frac{2}{9}$ मंझले को और $\frac{5}{18}$ छोटे लड़के को दिया, और शेष 456 रुपये अपनी पुत्री को दिये। उसकी सारी सम्पत्ति का मूल्य बताओ।

(१६) दो मनुष्य A और B स्थान से एक साथ एक दूसरे की ओर चले, और 3 घण्टे में एक दूसरे से मिले। यदि A, B से 36 मील दूर हो तो दोनों की चाल अलग-अलग बताओ, जबकि एक की चाल दूसरे से दुगनी हो।

(१७) पिता और पुत्र की आयु में 30 वर्ष का अन्तर है, 5 वर्ष के पश्चात् पिता की आयु पुत्र की आयु से तिगुनी हो जायगी।

बताओ, पिता की इस समय कितनी आयु है ?

(१८) एक स्त्री की आयु 40 वर्ष है और उसकी पुत्री की आयु उसकी आयु का चौथाई है। बताओ कितने वर्ष पश्चात् उस स्त्री की आयु पुत्री की आयु से तिगुनी होगी ?

(१९) एक आयताकार खेत की लम्बाई, चौड़ाई से दुगनी है। यदि लम्बाई और चौड़ाई को दो-दो फुट बढ़ा दें तो क्षेत्रफल 76 वर्ग फुट बढ़ जाता है। लम्बाई और चौड़ाई बताओ।

(२०) एक आयताकार खेत की लम्बाई और चौड़ाई में 16 फुट का अन्तर है। यदि लम्बाई और चौड़ाई में से पाँच-पाँच फुट कम कर दें तो क्षेत्रफल 255 वर्ग फुट कम हो जाता है। लम्बाई और चौड़ाई मालूम करो।

(२१) एक संख्या दो अंकों से बनी हुई है। इकाई का अंक दहाई के अंक से चौगुना है। यदि दोनों अंकों के स्थान बदल दिये जायं तो नई संख्या में 2 कम करने से पुरानी संख्या का तिगुना हो जाता है। संख्या बताओ।

(२२) एक मनुष्य कुछ समय में $3\frac{1}{2}$ मील प्रति घण्टे की चाल से A से B स्थान तक जाता है और लौट आता है। यदि वह 3 मील प्रति घण्टे की चाल से जाता और 4 मील प्रति घण्टे की चाल से लौट आता, तो उसे 15 मिनिट अधिक लगते। बताओ, A स्थान B से कितनी दूर है ?

(२३) दो लगातार संख्याओं के गुणनफल में से छोटी संख्या के वर्ग को घटाने से 41 बचते हैं। संख्यायें बताओ।

(२४) ऐसी दो संख्याएं मालूम करो जिनके वर्गों का अन्तर 141 हो।

(२५) दो संख्याओं के वर्गों का अन्तर 4[illegible]0 है और संख्याओं का अन्तर 10 है। संख्याएं बताओ।

(२६) एक घोड़े और गाड़ी का मूल्य 550 रुपये है। घोड़े के मूल्य का ५ गुना गाड़ी के मूल्य के तिगुने के बराबर है। घोड़े और गाड़ी का मूल्य अलग-अलग बताओ।

(२७) एक आयत की लम्बाई, चौड़ाई से चार गुनी है। यदि लम्बाई 6 फुट घटा दी जाय और चौड़ाई 3 फुट बढ़ा दी जाय, तो क्षेत्रफल उतना ही रहता है। आयत की चौड़ाई बताओ।

(२८) सिक्कों की दो ढेरियां हैं, एक अठन्नियों की है और दूसरी चवन्नियों की। पहली ढेरी का मूल्य दूसरी ढेरी के मूल्य से 3 रुपये अधिक है, परन्तु दूसरी ढेरी में पहली ढेरी से 8 सिक्के अधिक हैं। बताओ दोनों ढेरियों में कितने कितने सिक्के हैं।

(२९) 40 और 50 के बीच की ऐसी संख्या बताओ कि यदि उसमें 9 जोड़ दिया जाय तो अंकों के स्थान बदल जायें।

(३०) एक मनुष्य ने कुछ कुर्सियाँ 3 रुपये प्रति कुर्सी के भाव मोल लीं और उतनी ही मेज़ें 9 रुपये प्रति मेज़ के भाव मोल लीं। यदि वह सारे धन के दो बराबर भाग करके आधे धन से मेज़ें मोल लेता और आधे धन से कुर्सियां, तो उसे 16 वस्तुएं अधिक मिलतीं। कुर्सियों और मेज़ों की संख्या बताओ।

(३१) 125 के ऐसे चार भाग बनाओ कि यदि पहले में 4 जमा करें, दूसरे में से 4 घटाएँ, तीसरे को 4 से गुणन करें और चौथे को 4 पर भाग दें, तो प्रत्येक दशा में परिणाम बराबर हो।

[यदि यह परिणाम x हो, तो चार भाग यह होंगे —

$x-4$, $x+4$, $\frac{x}{4}$ और $4x$]

(३२) 110 के ऐसे चार भाग बनाओ कि यदि पहले में [illegible] जमा करें, दूसरे में से [illegible] घटाएँ, तीसरे को 3 से [illegible] और चौथे को [illegible] से भाग दें, तो प्रत्येक दशा में परिणाम समान हो।

(३९) एक लकड़ी के $\frac{1}{10}$ भाग का रंग लाल है, $\frac{1}{5}$ भाग का पीला, $\frac{1}{3}$ भाग का हरा, और $\frac{1}{30}$ भाग का काला रंग है। यदि उसके शेष भाग की लम्बाई 175 इंच है, तो उसकी कुल लम्बाई बताओ।

(४०) 64 पौंड को तीन पुरुषों में इस प्रकार बाँटो कि पहले को दूसरे से तिगुना धन मिले और तीसरे पुरुष को पहले दो पुरुषों के धन का एक तिहाई मिले।

चौथा अध्याय

सरल युगपत् समीकरण

Simple Simultaneous Equations

(दो अव्यक्त राशियों वाले)

(१) इस अध्याय में हम ऐसे सरल समीकरणों की व्याख्या करेंगे जिनमें एक से अधिक अव्यक्त राशियां होती हैं,

जैसे $x+y=10$

अब यदि हम यह कल्पना करें कि $x=1, 2, 3, 4, 5$ इत्यादि तो y के मूल्य इस प्रकार होंगे :—

$x=$	1	2	3	4	5	6	7	8	इत्यादि
$y=$	9	8	7	6	5	4	3	2	इत्यादि

स्पष्ट है कि $x+y=10$ समीकरण, x और y के अनगिनत मूल्यों द्वारा संतुष्ट हो सकता है। इससे यह परिणाम प्राप्त हुआ कि दो अव्यक्त राशियों वाला एक समीकरण अनिर्णीत होता है, अर्थात् उसकी अव्यक्त राशियों x और y के मूल्य निश्चित नहीं किये जा सकते।

परन्तु यदि पहले समीकरण के साथ साथ x और y का सम्बन्ध सूचित करने वाला एक और समीकरण दे दिया जाय, तो हमें x और y के केवल वे मूल्य मानने पड़ेंगे जो दोनों समीकरणों को सन्तुष्ट कर सकें।

अब यदि $x+y=10$ के साथ $y=x+4$ दिया जाय, तो $y=x+4$ में x और y के मूल्य इस प्रकार होंगे :—

$x=$	1	2	3	4	5	6	7	8	इत्यादि
$y=$	5	6	7	8	9	10	11	12	इत्यादि

दोनों समीकरणों में $x=3$, $y=7$ ही अव्यक्त राशियों के ऐसे मूल्य हैं जो दोनों समीकरणों को सन्तुष्ट कर सकते हैं। इसलिए यदि यह दोनों समीकरण एक साथ लिये जायें तो इनका हल केवल यही होगा कि $x=3$ और $y=7$

परिभाषा—यदि दो या दो से अधिक समीकरणों को, उनकी अव्यक्त राशियों के मूल्य एक साथ सन्तुष्ट कर सकते हों, तो उन्हें युगपत् समीकरण कहते हैं।

(१) यदि दो दिये हुए समीकरणों की अव्यक्त राशियाँ x और y हों और उनसे हम एक ऐसा समीकरण निकाल लें जिसमें केवल x हो या केवल y हो, तो हम इस नये समीकरण को पिछले अध्याय में बताई हुई विधि द्वारा हल कर सकते हैं।

यदि हम दो दिये हुए समीकरणों में से x निकाल दें और एक ऐसा समीकरण प्राप्त कर लें जिसमें केवल y ही अव्यक्त राशि हो तो यह कहा जायगा कि हमने x को लुप्त कर दिया।

अतः किसी अव्यक्त राशि को लुप्त करना, मानो उस राशि से छुटकारा पाना है अर्थात् एक ऐसा समीकरण प्राप्त करना है जिस में

(४) इससे हमें दो अव्यक्त राशियों वाले समीकरणों के एक जोड़े को हल करने की यह विधि हाथ लगी। दोनों समीकरणों में से एक अव्यक्त राशि (x ही सही) लुप्त करके एक ऐसा समीकरण प्राप्त करो जिस में केवल y ही अव्यक्त राशि हो। इस समीकरण को हल करके y का मूल्य निकाल लो। y का जो मूल्य मालूम हो उसे दिये हुए दोनों समीकरणों में से किसी एक में y के स्थान पर रख कर x का मूल्य निकाल लो। इस प्रकार x और y दोनों के मूल्य मालूम हो जायेंगे।

इस क्रिया की तीन पृथक् पृथक् विधियाँ नीचे दी जाती हैं :—

पहली विधि

उदाहरण (१) हल करो :—

$x-2y=3$ ...(1)

$2x+1=11y$ ...(2)

(1) से $x=3+2y$

(2) से $x=\frac{11y-1}{2}$

x के यह दोनों मूल्य समान हैं।

$\therefore 3+2y=\frac{11y-1}{2}$

दोनों पक्षों को 2 से गुणा किया, तो

$6+4y=11y-1$

पक्षान्तर करने से

$4y-11y=-1-6$

या $-7y=-7$

$\therefore y=1$

y का यह मूल्य (1 में रखने से

$x-2=3$

या $x=5$

$\therefore \left.\begin{array}{l} x=5 \\ y=1 \end{array}\right]$ उत्तर

दूसरी विधि

उदाहरण (२) हल करो :—

$34x-3y=50 \quad ...(1)$

$5x-y=-15 \quad ...(2)$

(2) से $y=5x+15$

y का यह मूल्य (1) में रखने से

$34x-3(5x+15)=50$

या $34x-15x-45=50$

या $19x=95$

या $x=5$

x का यह मूल्य (2) में रखने से

$25-y=-15$

या $-y=-40$

या $y=40$

$\therefore \left.\begin{array}{l} x=5 \\ y=40 \end{array}\right]$ उत्तर

उदाहरण (३) हल करो :—

$x+2y=3=4x-y$

इस के दो समीकरण इस प्रकार बने

$x+2y=3 \quad (1)$

$4x-y=3 \quad .(2)$

$12 - 2y = 8$

या $-2y = -4$

$\therefore \quad y = 2$

$\left.\begin{array}{l} x = 3 \\ y = 2 \end{array}\right]$ उत्तर

उदाहरण (५) हल करो :—

$4x + 3y = 1 \quad \ldots\ldots(1)$

$5x + 4y = 2 \quad \ldots\ldots(2)$

(1) को 4 और (2) को 3 से गुणा करने से

$16x + 12y = 4 \quad \ldots(3)$

$15x + 12y = 6 \quad \ldots(4)$

(3) में से (4) को घटाने

$x = -2$

(1 में x के स्थान पर -2 रखने से

$-8 + 3y = 1$

या $3y = 9$

या $y = 3$

$\therefore \left.\begin{array}{l} x = -2 \\ y = 3 \end{array}\right]$ उत्तर

उदाहरण (६) हल करो:—

$4x + 2y = 13 \quad \ldots(1)$

$2x - 2y = -1 \quad \ldots(2)$

दोनों समीकरणों को जमा करने से

$6x = 12$

$x = 2$

(1) में $x = 2$ रखने से

या $\quad 2y=5$

या $\quad y=2\frac{1}{2}$

$\therefore \left.\begin{array}{l} x=2 \\ y=2\frac{1}{2} \end{array}\right]$ उत्तर

[जांच:—
x के स्थान पर 2 और y के स्थान पर $2\frac{1}{2}$ रखने से

$$4x+2y=8+5=13$$

और $\quad 2x-2y=4-5=-1$

इसलिये x और y के यह मूल्य दोनों समीकरणों को सन्तुष्ट करते हैं।]

उदाहरण (७) हल करो—

$$2x-3y=-5 \ldots\ldots(1)$$

$$5x-3y=1 \ldots\ldots\ldots(2)$$

(2) में से (1) घटाने से

$$3x=6$$

या $\quad x=2$

(2) में x के स्थान पर 2 रखने से

$$10-3y=1$$

या $\quad -3y=-9$

या $\quad y=3$

$\therefore \left.\begin{array}{l} x=2 \\ y=3 \end{array}\right]$ उत्तर

[जांच:—

$$2x-3y=2\times2-3\times3=4-9=-5$$

और $\quad 5x-3y=5\times2-3\times3=10-9=1$

इसलिये x और y के यह मूल्य दोनों समीकरणों को सन्तुष्ट करते हैं।]

प्रश्नावली २०

निम्नलिखित युगपत् समीकरणों को हल करो और अपने उत्तर की जांच करो:—

(१) $x+y=6$
$x-y=2$

(२) $x-y=3$
$x+y=5$

(३) $x-3y=-5$
$x+2y=5$

(४) $2x+y=11$
$x+y=7$

(५) $3x+2y=31$
$3x+5y=37$

(६) $3x-2y=10$
$x+3y=7$

(७) $x+4y=21$
$4x-y=16$

(८) $5y-7x=4$
$8y-x=7$

(९) $2x-3y=0$
$3x-4y=21$

(१०) $5x-4y=1$
$3x+11y=81$

(११) $11x+2y=38$
$7x-3y=37$

(१२) $7y+5x=29$
$8y+3x=43$

(१३) $4x+7y=23$
$6x-5y=-12$

(१४) $12x-5y=1$
$10y+21x=1$

(१५) $7=2x+y$
$x+3y=2$

(१६) $y=4x-10$
$4=2x-y$

(१७) $3x=y+23$
$3y=x+19$

(१८) $4y=7+9x$
$3x+7y=1$

(१९) $5x-3y+9=0$
$x+6y+15=0$

(२०) $9x=18-25y$
$6x-12=55y$

(२१) यदि $2x-5y=1$, और $7x+3y=24$, तो $x-y$ का मूल्य बताओ।

(२२) $7y=2-x.$

(२३) $4x=2y+5,$
$2y=11-4x$

तो $2y=4$

$y=2$

$\therefore \left.\begin{array}{l} x=3 \\ y=2 \end{array}\right\}$ उत्तर

प्रश्नावली २१

हल करो:—

(१) $2x+3y=7,$
$3x+2y=8$

(२) $23x+17y=63;$
$17x+23y=57$

(३) $11x-13y=46,$
$13x-11y=50$

(४) $11x+12y=58$
$12x+11y=57$

(५) $\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y=1;$
$\frac{1}{4}x+\frac{1}{3}y=\frac{1}{6}$

(६) $\frac{2x}{3}-\frac{3y}{5}=1;$
$\frac{3x}{5}-\frac{2y}{3}+1=0$

ऐसे समीकरण जिन में अव्यक्त राशियों के व्युत प्रयुक्त हों।

परिभाषा—यदि दो राशियों का गुणनफल एक इकाई हो, तो उन्हें एक दूसरे का व्युत्क्रम कहते हैं। जैसे x व्युत्क्रम $\frac{1}{x}$ है, y का $\frac{1}{y}$, $\frac{a}{b}$ का $\frac{b}{a}$, $\frac{1}{y}$ का y।

जिन समीकरणों में $\frac{1}{x}$ और $\frac{1}{y}$ प्रयुक्त हों उन्हें हल करने में प $\frac{1}{x}$ और $\frac{1}{y}$ के मान साधारण रीति से निकालो तो फिर x और y मान उनके व्युत्क्रम होंगे।

उदाहरण (१) हल करो—

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6} \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{6} \end{cases}$$

समीकरणों को जमा करने और घटाने से,

$\frac{2}{x}=1$ और $\frac{2}{y}=\frac{2}{3}$

$\therefore \frac{1}{x}=\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{y}=\frac{1}{3}$

$\therefore \left.\begin{matrix} x=2 \\ y=3 \end{matrix}\right]$ उत्तर

उदाहरण (१२) हल करो—

$\frac{4}{x}-\frac{3}{y}+1=0 \ldots\ldots\ldots(1)$

$\frac{8}{x}+\frac{5}{y}=9 \ldots\ldots\ldots(2)$

(1) को 5 से और (2) को 3 से गुणा करके दोनों को जोड़ दिया, तो

$\frac{20}{x}+\frac{24}{x}+5=27$

या $\frac{44}{x}=22$

$\therefore \frac{1}{x}=\frac{1}{2}$

$\therefore x=2$

(2) में x के स्थान पर 2 रखा,

तो $\frac{8}{2}+\frac{5}{y}=9$

या $\frac{5}{y}=5 \therefore y=1$

$\left.\begin{matrix} x=2 \\ y=1 \end{matrix}\right\}$ उत्तर

प्रश्नावली २२

निम्नलिखित समीकरणों को हल करो—

(१) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=8;$ $\quad \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=4,$

(२) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6};$ $\quad \frac{1}{y}-\frac{1}{x}=\frac{1}{6}$

(३) $\frac{1}{x}+\frac{3}{y}=11,$ $\quad \frac{3}{x}+\frac{7}{y}=27$

(४) $\frac{15}{x}+\frac{15}{y}=1.$ $\quad \frac{6}{x}-\frac{30}{y}=1$

(५) $\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=13,$ $\quad \frac{5}{x}-\frac{3}{y}=0$

(६) $\frac{3}{x}-\frac{2}{y}=2;$ $\quad \frac{2}{x}+\frac{3}{y}=3\frac{1}{2}$

(७) $\frac{15}{x}-\frac{4}{y}=3,$ $\quad \frac{9}{x}+\frac{8}{y}=7,$

(८) $\frac{8}{x}-\frac{9}{y}=7,$ $\quad \frac{10}{x}-\frac{12}{y}=9$

(९) $\frac{5}{x}-\frac{8}{y}=1$ $\quad$ 4 [illegible] $\frac{1}{x}=2$

(१०) $\frac{9}{y}-\frac{7}{x}=$ [illegible] $\quad \frac{14}{x}+\frac{9}{y}=$ [illegible]

(११) [illegible]

(१२) $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=2$ $\quad \frac{1}{x}$ [illegible] $\frac{1}{2y}=\frac{1}{3}$

(१३) $\frac{3}{x} + 5y = 2;$
$\frac{1}{x} - 2y = 8$

(१४) $\frac{11}{x} - \frac{8}{y} = -5;$
$3\left[\frac{2}{x} + \frac{1}{y}\right] = 12$

(१५) $\frac{x-1}{y-1} = \frac{3}{4};$
$\frac{x+2}{y-2} = \frac{4}{3}$

(१६) $\frac{2(x-1)}{y-2} = 3 = \frac{5x+1}{2y}$

(१७) $\frac{3x}{4} - \frac{y+1}{2} = 1$
$\frac{x+1}{3} + \frac{3(y-1)}{4} = 9$

(१८) $6x + 55y - 128 = 0 = 34x - 132 + 15y$

(१९) $\cdot 5x = \cdot 4(x+y) - \cdot 3;$
$\cdot 2y = \cdot 7(y - x)$ ...

आधे में दूसरी का तिहाई जोड़ा जाय तो योगफल 8 होता है, और पहली संख्या के $\frac{1}{5}$ में से दूसरी संख्या का $\frac{1}{9}$ घटाने से 1 बचता है। वे संख्याएं प्रतीत करो।

मान लो कि वे संख्याएं x और y हैं तो प्रश्न की शर्तों के अनुसार

$\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=8$......(1)

और $\frac{1}{5}x-\frac{1}{9}y=1$.....(2)

भिन्नों से छुटकारा पाने के लिये (1) को 6 से और (2) को 45 से गुणा किया, तो

$3x+2y=48$.....(3)

और $9x-5y=45$.....(4)

(3) को तीन से गुणा करके (4) में से घटाने पर

$-11y=-99$

या $y=9$

(4) में $y=9$ रखने से

$9x-45=45$

या $9x=90$

$x=10$

इसलिए वे संख्याएं 10 और 9 हैं। उत्तर

[जाँच

$\frac{10}{2}+\frac{9}{3}=8$

और $\frac{10}{5}-\frac{9}{9}=1$]

उदाहरण (२) एक मनुष्य ने अपने पुत्र से यह कहा—"सात वर्ष हुए मेरी आयु तुम्हारी आयु से सात गुनी थी और तीन वर्ष में मेरी आयु तुम से तिगुनी होगी।" बताओ, पिता और पुत्र की आयु इस समय क्या-क्या है?

मान लो कि इस समय पिता की आयु x वर्ष है और पुत्र की y वर्ष, तो अब से 7 वर्ष पहले पिता की आयु $(x-7)$ वर्ष थी और पुत्र की $(x-7)$ वर्ष। अब से तीन वर्ष पश्चात् पिता की आयु $(x+3)$ वर्ष हो जावेगी और पुत्र की $(y+3)$ वर्ष।

अब प्रश्न की शर्तों के अनुसार

$-7=7(y-7)\ldots\ldots(1)$

और $x+3=3(y+3)\ldots\ldots(2)$

(1) में से (2) घटाने से

$-10=4y-58$

जिससे $y=12$

(2) में $y=12$ रखने से

$x+3=3(12+3)$

या $x+3=45$

$x=42$

$\therefore$ इस समय पिता की आयु 42 वर्ष है और पुत्र की आयु 12 वर्ष

प्रश्नावली २३

(१) दो संख्याओं का योगफल 132 है और व्यवकलनफल 18 है, वे संख्यायें प्रतीत करो।

(२) दो संख्याओं का योगफल 80 है और छोटी संख्या के तिगुने में से बड़ी संख्या घटाने पर 20 बचते हैं। वे संख्यायें बताओ।

(३ ऐसी दो संख्यायें बताओ कि पहली संख्या दूसरी संख्या के आधे से 2 अधिक हो और दूसरी संख्या पहली के तिगुने से 20 कम हो।

(४) ऐसी दो संख्याएं प्रतीत करो कि पहली संख्या, और दूसरी संख्या की एक चौथाई का योगफल 35 हो और पहली संख्या का तिगुना दूसरी संख्या से 7 अधिक हो।

(५) एक संख्या के ऐसे दो भाग किये जा सकते हैं कि छोटे भाग का दुगना बड़े भाग से 5 अधिक हो, और बड़े भाग का दुगना छोटे भाग के तिगुने से 1 अधिक हो। वह संख्या और उसके भाग बताओ।

(६) ऐसी दो संख्याएं a और b प्रतीत करो।
कि $a+\frac{1}{3}b=b+\frac{1}{4}a=300$

(७) A की आयु का तिगुना B की आयु के दुगने से 6 वर्ष अधिक है। यदि B की आयु A से 3 वर्ष अधिक हो, तो बताओ उनकी आयु क्या क्या हैं !

(८) A की आयु का आधा B की आयु के एक तिहाई से 2 वर्ष अधिक है। यदि उनकी आयु का योगफल 44 वर्ष हो, तो प्रत्येक की आयु बताओ !

(९) तीन वर्ष पहले पिता की आयु पुत्र से दुगनी थी। तीन वर्ष पश्चात् उन दोनों की आयु का योगफल 70 वर्ष हो जायेगा। बताओ, इस समय उनकी आयु क्या क्या है ?

(१०) इस समय A की आयु B से 10 वर्ष कम है, और दोनों की आयु का योगफल 70 वर्ष है। बताओ, अब से 11 वर्ष पश्चात् उनकी आयु क्या क्या होंगी !

(११) पिता और पुत्र की वर्तमान आयु का योगफल 70 वर्ष है। दस वर्ष बीते पुत्र की आयु पिता से एक चौथाई थी। उनकी आयु इस समय क्या क्या है ?

उदाहरण (३) एक संख्या में दो अंक हैं और दोनों अंकों का योगफल 5 है। यदि अंकों के स्थान बदल दिये जावें, तो नई संख्या पहली संख्या से 9 अधिक होगी। बताओ, वह संख्या क्या है ?

मान लो कि इकाई का अंक x है

और दहाई का अंक y है

तो वह संख्या $=10y+x$

अंकों के स्थान बदलने से संख्या का मूल्य $10x+y$ हो जायगा, क्योंकि x दहाई का अंक हो जायगा और y इकाई का।

अब प्रश्न में दी हुई शर्तों के अनुसार

$x+y=5$ ... ... (1)

और $10x+y=10y+x+9$ ... (2)

(2) को संक्षिप्त करने से

$x-y=1$ (3)

(1) और (3) को जमा करने से

$2x=6$

या $x=3$

(1) में से (3) घटाने से

$2y=4$

या $y=2$

इस लिये इच्छित संख्या = 23 उत्तर

उदाहरण (४) तीन अंकों की एक संख्या के अंकों का योगफल [illegible] है बीच वाला अंक दूसरे अंकों के [illegible] के बराबर है। यदि पहले और तीसरे अंकों के स्थान आपस में बदल दिये जावें, तो संख्या के मूल्य [illegible] अधिक [illegible] वह संख्या बताओ।

क्योंकि बीच वाला अंक पहले और तीसरे अंकों के योगफल के बराबर है और इन अंकों का योगफल 10 है, इस लिए स्पष्ट है कि बीच वाला अंक 5 है।

अब यह मान लो कि इकाई का अंक x है और सैंकड़े का अंक y है।

दी हुई संख्या का मूल्य $100y+50+x$

x और y के स्थान एक दूसरे से बदलने पर अर्थात् x सैंकड़े का अंक और y इकाई का अंक हो जाने पर, संख्या का मूल्य $100x+50+y$ हो जायेगा।

अब प्रश्न की शर्तों के अनुसार

$y+5+x=10$ ... (1)

और $100x+50+y=100y+50+x+99$ (2)

(1) को संक्षिप्त करने से

$x+y=5$ (3)

(2) को संक्षिप्त करने से

$x-y=1$ ... (4)

(3) और (4) से स्पष्ट है कि

$x=3$

और $y=2$

इसलिए इष्ट संख्या = 253 उत्तर

(१२) दो अंकों वाली एक संख्या का दहाई का अंक इकाई के अंक से 5 अधिक है, और संख्या का मूल्य अंकों के योगफल का आठ गुना है। वह संख्या मालूम करो।

(१३) दो अंकों वाली एक संख्या के अंकों का योगफल 9 है। यदि अंकों के स्थान बदल दिये जायँ तो नई संख्या का मूल्य असली संख्या से 63 अधिक हो जाता है। वह संख्या बताओ।

(२१) तीन अंकों वाली एक संख्या के अंकों का योगफल 14 है। बीच वाला अंक पहले और तीसरे अंक के योगफल के बराबर है, और अंकों का क्रम उलटने से संख्या के मूल्य में 297 की कमी हो जाती है। वह संख्या बताओ।

[संकेत - स्पष्ट है कि बीच का अंक 7 है।]

भिन्नों के प्रश्न

उदाहरण (४) किसी भिन्न के हर और अंश का अन्तर 1 है। यदि अंश को पाँच गुणा कर दिया जाय, तो भिन्न का मूल्य पहले से 3 अधिक हो जाता है, वह भिन्न बताओ।

मान लो भिन्न का अंश x

$$\text{तो हर} = x+1$$

$$\text{भिन्न} = \frac{x}{x+1}$$

प्रश्न की शर्त के अनुसार

$$\frac{5x}{x+1} = \frac{x}{x+1} + 3 \quad (1)$$

(1) के दोनों पक्षों को $(x+1)$ से गुणा करने पर

$$5x = x + 3(x+1)$$

$$= x + 3x + 3$$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

(२५) ऐसा भिन्न मालूम करो कि उसके अंश में एक जमा करने से भिन्न का मूल्य $\frac{1}{4}$ हो जाय, और हर में से एक घटाने से भिन्न का मूल्य 5 हो जाय।

(२६) किसी भिन्न का हर अंश से 13 अधिक है। यदि अंश में 2 जमा कर दें और हर में भी 2 जमा कर दें, तो भिन्न का मूल्य $\frac{1}{2}$ हो जाता है। वह भिन्न मालूम करो।

(२७) दो भिन्नों का अन्तर $\frac{1}{12}$ है और योग $\frac{1}{2}$; वे भिन्न मालूम करो।

(२८) एक मनुष्य ने कुछ मुर्गे और खरगोश पाल रखे हैं। यदि उन सब के सिरों की संख्या 22 और टाँगों की संख्या 70 हो, तो कितने मुर्गे और कितने खरगोश हैं?

पांचवां अध्याय

वर्ग समीकरण या द्विघात समीकरण

Quadratic Equations

एक आयत का क्षेत्रफल 24 वर्गफुट है। उसकी लम्बाई उसकी चौड़ाई से 2 फुट अधिक है। उसके भुज प्रतीत करो।

मान लो कि आयत की चौड़ाई x फुट और लम्बाई $x+2$ फुट

तो क्षेत्रफल $= x(x+2)$ वर्गफुट

$\therefore$ दी हुई शर्त के अनुसार $x(x+2)=24$

या, $x^2+2x=24$

यहां इस समीकरण में x^2 प्रयुक्त है इसे द्विघात या वर्ग समीकरण कहते हैं।

x का मूल्य प्रतीत करने के लिए हम पहले दोनों पक्षों में एक जमा करके पूर्ण वर्ग बनाते हैं।

$\therefore x^2+2x+1=25$

या, $(x+1)^2=5^2$

दोनों पक्षों का वर्गमूल निकालने से

$x+1=5$ या -5

$x=4$ या -6

धनात्मक मूल लेने पर आयत के भुज क्रमशः 4 फुट और 6 फुट हैं।

अतः हम वर्ग समीकरण को वर्ग पूरा करके हल कर सकते हैं

बताओ, प्रत्येक नाली अलग-अलग उसे कितने समय में भर सकती है।

कल्पना करो कि पहली नाली टंकी को x घंटे में भर सकती है, तो दूसरी $x+3$ घण्टे में भर सकती है।

पहली नाली टंकी का $\frac{1}{x}$ भाग एक घण्टे में भरती है।

दूसरी नाली टंकी का $\frac{1}{x+3}$ भाग एक घण्टे में भरती है।

∴ दोनों मिलकर टंकी का $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}\right)$ भाग एक घंटे में भरेंगी।

परन्तु वे दोनों एक घण्टे में टंकी का $\frac{1}{3\frac{3}{5}}$ भाग या $\frac{5}{18}$ भाग भरती हैं।

∴ $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}=\frac{5}{18}$ या $\frac{2x+3}{x(x+3)}=\frac{5}{18}$

दोनों पक्षों को $18x(x+3)$ से गुणा करने पर,

$$18(2x+3)=5x(x+3),$$

अथवा $5x^2-21x-54=0$

या $(x-6)(5x+9)=0$

∴ $x=6$ अथवा $x=-\frac{9}{5}$

दूसरा उत्तर ऋणात्मक है इसलिए इसे ठीक नहीं मान सकते। इसे उत्तर में हम इस परिणाम पर पहुंचते हैं कि पहली नाली टंकी को 6 घण्टे में और दूसरी 9 घण्टे में भर सकती है।

उदाहरण (५) मैंने एक घड़ा 39 रुपये में बेचा तो मुझे उतने प्रतिशत लाभ हुआ जितने रुपये में मैंने घड़ी मोल ली थी। बताओ,

कल्पना करो कि घड़ी का क्रयमूल्य $= x$ रुपये, तो

$$\text{विक्रय मूल्य} = x + \frac{x^2}{100}$$

$$\therefore x + \frac{x^2}{100} = 39$$

समीकरण को हल करने पर,

$$x = 30 \text{ या } -130$$

ऋणात्मक मूल्य का कोई अर्थ नहीं इसलिए इसको छोड़ दिया।

अतः क्रयमूल्य $= 30$ रुपये उत्तर

प्रश्नावली २५

(१) दो संख्याओं का योगफल 14 और गुणनफल 24 है। वह संख्याएं बताओ।

(२) ऐसी दो लगातार संख्याएं बताओ जिनका गुणनफल 506 के बराबर हो।

(३) ऐसी दो लगातार सम संख्याएं बताओ जिनका गुणनफल 288 के बराबर हो।

(४) ऐसी दो लगातार विषम संख्याएं बताओ जिनका गुणनफल 1443 के बराबर हो।

(५) दो लगातार विषम संख्याएं बताओ जिनके वर्गों का योग 290 के बराबर हो।

(६) ऐसी दो संख्याएं बताओ जिनका अन्तर 11 हो और उनके वर्गों का अन्तर [illegible] है।

(७) एक [illegible] का क्षेत्रफल [illegible] है [illegible] है। [illegible]

(८) एक संख्या और उसके व्युत्क्रम का योगफल $\frac{२६}{५}$ है वह संख्या प्रतीत करो।

(९) एक संख्या और उसके व्युत्क्रम का अन्तर $\frac{६३}{८}$ है। वह संख्या प्रतीत करो।

(१०) दो संख्याओं का गुणनफल 729 है, और यदि एक संख्या को दूसरी पर भाग दिया जाय तो भजनफल 9 है। संख्याएँ मालूम करो।

(११) दो धनात्मक संख्याएँ बताओ जिनका योगफल 12 हो और उनके व्युत्क्रमों का योगफल $\frac{३}{८}$ हो।

(१२) एक भिन्न का हर उसके अंश से 4 अधिक है। यदि उस भिन्न को उसी से गुणा करें तो गुणनफल के हर और अंश का अन्तर 40 होता है। भिन्न प्रतीत करो।

(१३) एक मनुष्य की आयु उसके पुत्र से 20 वर्ष अधिक है, 5 वर्ष पश्चात् दोनों की आयु का गुणनफल 576 होगा। बताओ, उनकी आयु इस समय कितनी कितनी है ?

(१४) एक मनुष्य और उसके पुत्र की अवस्थाओं का जोड़ 60 वर्ष है औरउनकी आयु के अंकों का गुणनफल 576 होता है। दोनों की अवस्थायें बताओ।

(१५) एक मनुष्य ने 1 रुपया 8 आने के कुछ सेब लिये उसने सब सेब एक आना आध पाई प्रति सेब की दर से बेच दिये और इस प्रकार उसे उतना लाभ हुआ जितने में उसने एक सेब मोल लिया था। बताओ, उसने कितने सेब मोल लिये थे और प्रत्येक सेब कितने का मोल लिया था ?

(१६) एक आयत का क्षेत्रफल 1200 वर्गगज है। यदि उसकी चौड़ाई एक गज अधिक होती और लम्बाई दो गज कम होती तो भी क्षेत्रफल इतना ही होता। उसकी लम्बाई चौड़ाई बताओ।

(१७) एक रुपये में जितनी नारंगियाँ मिलती हैं, उनमें 8 नारंगियाँ अधिक मिलने लगें, तो एक दर्जन नारंगियों का मोल 4 आने कम हो जाय। बताओ, एक कोड़ी नारंगियाँ कितने में मिल रही हैं?

(१८) एक आयताकार खेत का क्षेत्रफल 48 वर्गगज है और उस के कर्ण की लम्बाई 10 गज है। उसकी लम्बाई चौड़ाई बताओ।

(१९) ऐसी संख्या बताओ जिसे उसके वर्ग में जमा किया जाय तो योगफल उससे अगली संख्या से नौगुना हो जाय।

(२०) एक मनुष्य ने कुछ कुर्सियाँ 200 रुपये में मोल लीं। उनमें से 5 चोरी हो गईं। शेष कुर्सियों में से उसने प्रत्येक कुर्सी को क्रय मूल्य से 4 रुपये अधिक मूल्य पर बेचा और इस प्रकार उसे 40 रुपये का लाभ हुआ। बताओ, उसने कितनी कुर्सियां मोल ली थी और प्रत्येक कुर्सी कितने को मोल ली थी?

(२१) एक मनुष्य ने अपनी घड़ी 75 रुपये में बेची और उतने प्रतिशत लाभ उठाया जितने रुपये की मोल ली थी। घड़ी का क्रय मूल्य बताओ।

(२२) मैंने एक मेज 14 रुपये 1 आने को बेची और उतने प्रतिशत लाभ उठाया जितने रुपये को यह मेज मोल ली थी, मेज का क्रय मूल्य बताओ।

जांच पत्र (पहला खण्ड)

पत्र १

१. $x^2+2y^2x+y^2$ का $x^2-2y^2x+y^2$ से गुणन करो

२. गुणनखंड करो :—

(क) $x^2+4x-bx-4b$

(ख) $xy\,(a^2+b^2)-ab\,(x^2+y^2)$

३. यदि $x=b+c,\ y=c-a,\ z=a-b,$

तो सिद्ध करो कि $x^2+y^2+z^2-2xy-2xz+2yz=4b^2$

४. हल करो :—

(क) $2-2\,(x-3)=4x-4(x-3)$

(ख) $3x+4y=41;\ 5x+3y=50$

(ग) $x^2-5x=0$

५. एक कमरे की चौड़ाई 10 फुट है। यदि लम्बाई 3 फुट अधिक होती और चौड़ाई 1 फुट कम, तो क्षेत्रफल में कोई अन्तर न होता। लम्बाई मालूम करो।

पत्र २

१. a^4+4b^4 को $a^2-2ab+2b^2$ से भाग दो।

२. गुणनखंड करो : -

(क) $2xy-3yz-4ax+6az$

(ख) $(a+b)^2+2c\,(a+b)+c^2$

(ग) $16a^4-81x^4$

३ यदि $x+\frac{1}{x}=5$, तो $x^2+\frac{1}{x^2}$ का मूल्य बताओ।

जांच पत्र

१. हल करो :—

(क) $(2x+3)(3x+5)=(6x+1)(x+1)+74$

(ख) $41x+31y=133,$

$31x+41y=83$

(ग) $x^2-9x+14=0$

२. एक संख्या दूसरी संख्या से 4 अधिक है और दोनों का जोड़ 36 है। संख्याएं मालूम करो।

पत्र ३

१. $(a+b+1)(a-b+2)$ के गुणनफल को $(a+b-1)(a-b-2)$ के गुणनफल में जोड़ो, और $a=5, b=2$ मान कर अपने उत्तर की जांच करो।

२. गुणनखंड करो :—

(क) $81x^4-1$

(ख) $16y^3-y$

(ग) $9(a-b)^2-1$

(घ) $392-2x^2$

३. मूल्य निकालो :—

(क) 2003×1997

(ख) $800{\cdot}4\times799{\cdot}6$

संकेत—इस सूत्र से काम लो $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

४ हल करो :—

क $\frac{5x-12}{3}-\frac{3x-5}{7}=\frac{x-7}{4}$

ख $y=3x-2,\ y-1=4x$

ग $15x^2=x-20$

५. हरि के पास श्याम से तिगुना रुपया है। यदि हरि श्याम को 250 रु० दे दे तो श्याम के पास हरि से दुगुने रुपये हो जाएँगे। बताओ दोनों के पास कितने कितने रुपये हैं ?

पत्र ४

१. यदि $x=2, y=3, a=4$ तो
$7ax^3-5a^2xy-10x^2a+50xy^2+3ax^3-20y^2x$ का मूल्य क्या होगा ?

२. गुणनखंड करो :-
(क) $a^2-b^2+c^2+2ac$
(ख) $ca(c-a)+ab(a-b)$
(ग) x^4+x^2+1
(घ) x^4-5x^2+4

३. गुणनखंड करके मूल्य प्रतीत करो :-
(क) $\dfrac{\cdot 769\times\cdot 769-\cdot 231\times\cdot 231}{\cdot 769-\cdot 231}$
(ख) $\{(81\frac{1}{7})^2-(18\frac{3}{7})^2\}-63\}$

४. हल करो :-
(क) $3+\frac{x}{4}-\frac{1}{2}\left(4-\frac{x}{3}\right)-\frac{5}{6}+\frac{1}{3}\left(11-\frac{x}{2}\right)$
(ख) $\frac{5}{x}+\frac{3}{y}=30,\ \frac{9}{x}=2+\frac{5}{y}$
(ग) $2x^2-x-210=0$

५. पिता की आयु पुत्र की आयु से पाँच गुनी है। 24 वर्ष पश्चात् पुत्र की आयु पिता की वर्तमान आयु के बराबर होगी। दोनों की वर्तमान आयु बताओ।

जांच पत्र

पत्र ५

१ सरल करो $2a-[3a-\{4a-2a-\cdot\}]$

२ गुणनखंड करोः—

(क) $x^2+13x-42$

(ख) $x^2-13x+42$

(ग) $x^2-5x-24$

(घ) $x^2+4x-221$

३. (क) $x^2-\frac{1}{x^2}-1$ का $x+\frac{1}{x}$ से गुणन करो

(ख) $18x^3-39x^2+18x-5$ में $3x-5$ का भाग दो।

४ हल करोः—

(क) $\frac{x}{5}+\frac{x}{25}=120$

(ख) $4x-3y=12,\ 2x-y=16$

(ग) $24x^2-7x-6=0$

५. एक संख्या में दो अंक हैं जिनका योगफल ७ है। यदि उस संख्या में २७ जोड़ें तो अंक उलट जाते हैं। संख्या मालूम करो।

पत्र ६

१. $(x+5a)(x+3a)$ को दो वर्गों के अन्तर के रूप में प्रदर्शित करो।

२. गुणनखंड करो :—

(क) $6x^2+29x+35$

(ख) $30x^2-61x+30$

(ग) $9a^2-3a-2$

(घ) $2x^2$ [illegible]

३. बताओ $3a-5b+7c$ में से क्या घटाएं कि शेष $a-2b+3c$, $3b-c-2a$, और $2c-b+3x$ के योगफल के बराबर हो ?

४. हल करोः—

(क) $(x-\frac{1}{2})^2-(x-\frac{3}{2})^2=x+2$

(ख) $2x-3y=5,\ 3x-4y=6$

(ग) $2x^2-10x=3x-15$

५. 9 सेर गेहूँ और 18 सेर जौ का मूल्य 3 रु० 15 आ० और 21 सेर गेहूँ और 9 सेर जौ का मूल्य 5 रु० 1 आ० है। एक सेर गेहूँ और एक सेर जौ का मूल्य मालूम करो।

पत्र ७

१. $2a-3\{b-c(2+a)\}$ और $3c(a-1)-(b-2a)$ को सरल करो और पहले व्यंजक को दूसरे व्यंजक में से घटाओ।

२. (क) यदि $x-\frac{1}{x}=10$, तो $x^3+\frac{1}{x^3}$ का मूल्य बताओ।

(ख) यदि $a+b=9$ और $ab=20$, तो a^2+b^2 का मान ज्ञात करो।

३. $49a^2+70ab$ में क्या जोड़ दें कि यह व्यंजक एक पूर्ण वर्ग बन, जाय ?

४. हल करो.—

(क) $\frac{x+2}{3}+2=\frac{x+4}{5}+\frac{x+6}{7}$

(ख) $12x-15y=3x-24=1$

(ग) $2x^2-3x-629=0$

५. एक कुंजड़ी ने कुछ सेब एक आने के तीन के हिसाब से और उतने ही सेब एक आने के चार के हिसाब से मोल लिये। सब सेबों को 2 आने के 7 के हिसाब से बेच दिया। उसे 3 आने का घाटा हुआ। बताओ उसने कुल कितने सेब मोल लिये थे और कितने में लिये थे ?

पत्र ८

१. $6x+19x^2+20-33x^3-5x^4$ को $4x^2+x-5$ से भाग दो।

२. सरल करो—

(क) $(a+b-c+d)^2-(a-b+c-d)^2$

(ख) यदि $a=1, b=2, c=3$, तो $\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}$ का मान मालूम करो।

३. गुणनखंड करो :—

(क) $3x^2+4xy-4y-3x$

(ख) a^3+a^2-a-1

(ग) $1-19x-120x^2$

४. हल करो :—

(क) $\frac{3x}{4}+\frac{1-2x}{5}=2\frac{1}{2}-\frac{x-\frac{1}{2}}{3}$

(ख) $\frac{2}{x}-\frac{2}{y}=2,\ \frac{1}{x}-\frac{1}{2y}=\frac{1}{2}$

(ग) $4x^2-16x+15=0$

५. एक संख्या 12 से जितनी अधिक है उसके व्युत्क्रम का 30 गुना $\frac{1}{2}$ से उतना ही कम है। वह संख्या मालूम करो।

पत्र ९

१. $2y^2-5y+6$, y^2+4y+3 और $-3y^2+y+1$ के योगफल को y^2+y+1 से गुणा करो।

२. गुणनखंड करो :—

(क) $(2x-1)^2-(x-2)^2$

(ख) $1-4x^2-y^2-4xy$

(ग) $24x^2-4x-48$

दूसरा खण्ड

अंक गणित

छटा अध्याय

गुणनखण्ड और अपवर्त्य

Factors and Multiples

परिभाषाएँ

दि एक संख्या किसी दूसरी संख्या को पूर्ण रूप से विभाजित करदे हिली संख्या को गुणनखंड या अपवर्तक कहते हैं और दूसरी प्रपवर्त्य कहते हैं। जैसे 15, 5 से पूरी तरह बंट जाता है अतः पांच का अपवर्त्य और पांच पन्द्रह का गुणनखण्ड है।

जो संख्या 2 से विभक्त हो जाय उसको सम संख्या, और त्या दो से विभक्त न हो उसको विषम संख्या कहते हैं—

यथा 2, 4, 6, 8 आदि *सम संख्या हैं।*

और 3, 5, 7, 9 आदि विषम संख्या हैं।

जो संख्याएँ एक दूसरी के पश्चात् साधारण रूप में लगातार हैं उनको क्रमागत संख्याएँ कहते हैं।

यथा 1, 2, 3, 4, 5 आदि।

और 11, 12, 13, 14 आदि।

प्रत्येक संख्या अपने से और इकाई से विभक्त हो सकती है। संख्यायें जैसे 3, 5, 7, 11, 13 आदि केवल अपने से इकाई से ही विभक्त हो सकते हैं, इनको अभाज्य संख्या हैं।

(४) यदि किसी संख्या के अन्त में शून्य हो, तो वह संख्या 10 से पूरी बँट जायगी। यदि अन्त में दो शून्य हों तो 100 से और यदि तीन शून्य हों, तो 1000 से पूरी बँट जायगी। [कारण स्पष्ट है]

(५) यदि किसी संख्या के अन्त में शून्य या 5 हो तो वह संख्या 5 से पूरी बँट जायगी।
यथा 290, 295, 225 आदि।
[कारण, वही है जो ऊपर (1) में बताया गया है]

(६) यदि किसी संख्या के अन्त में दो शून्य हों या अन्त के दो अंक 25 से बँट सकते हों तो वह संख्या 25 से पूरी बँट जायेगी, जैसे 250 और 275।
[कारण वही है जो ऊपर (2) में बताया गया है।]

(७) यदि किसी संख्या के अन्त में तीन शून्य हों या उसके अन्तिम तीन अंक 125 से बँट सकते हों तो वह संख्या 125 से बँट जायेगी, जैसे 19375 और 19500।
[कारण, वही है जो ऊपर (3) में बताया गया है।]

(८) यदि किसी संख्या के अंकों का योगफल 3 से पूरा पूरा बँट जाय तो वह संख्या तीन से बँट जायगी; जैसे 531 क्योंकि $5+3+1=9$।
[कारण: $531=500+30+1$
$=5(99+1)+3(9+1)+1$
$=5\times 99+3\times 9+5+3+1$,
[illegible] $5+3+1$

[illegible] 531 भी बँट [illegible]

(९) किसी संख्या के अंकों का योग 9 से पूरा पूरा बंट जाय तो वह संख्या भी 9 से बंट जावेगी; जैसे 531, क्योंकि 5+3+1=9

[कारण:—वही जो ऊपर बताया गया है।]

(१०) यदि कोई संख्या 2 और 3 दोनों से बंट जाय तो वह 6 से भी बंट जावेगी; जैसे 546।

(११) यदि कोई संख्या 4 और 3 से बंट जावे तो वह 12 से भी बंट जावेगी; जैसे 46116।

(१२) जिस संख्या के सम और विषम स्थानों के अंकों का अन्तर शून्य हो या 11 से पूरा पूरा बंट सकता हो वह संख्या 11 से बंट जावेगी; जैसे 65967।

$(7+9+6)-(6+5)=22-11=11$

[कारण:—
$$\begin{aligned}65967 &= 60000+5000+900+60+7\\ &= 6(9999+1)+5(1001-1)+\\ &\quad 9(99+1)+6(11-1)+7\\ &= 6\times9999+5\times1001+9\times99\\ &\quad +6\times11+6-5+9-6+7\\ &= 11 \text{ का अपवर्त्य} + (6+9+7)-(5+6)\\ &= 22-11=11\end{aligned}$$

∴ यदि $(7+9+6)-(6+5)$, 11 से पूरा पूरा बंट जाय तो 65967 भी बंट जावेगा।]

दी हुई संख्या के अभाज्य गुणनखंड बनाना।

उस संख्या में अभाज्य संख्याओं का भाग देकर देखो। पहले 2 का भाग दो फिर 3, 5, 7, 11 आदि का भाग देकर देखो।

उदाहरण (१)
$$\begin{aligned}15708 &= 2\times7854\\ &= 2\times2\times3927\\ &= 2\times2\times3\times1309\\ &= 2\times2\times3\times7\times187\\ &= 2\times2\times3\times7\times11\times17\end{aligned}$$

यह क्रिया भाग की रीति से इस प्रकार भी कर सकते हैं।

$$\begin{array}{r|r} 2 & 15708 \\ \hline 2 & 7854 \\ \hline 3 & 3927 \\ \hline 7 & 1309 \\ \hline 11 & 187 \\ \hline & 17 \end{array}$$

$\therefore 15708 = 2\times2\times3\times7\times11\times17$ उत्तर

उदाहरण (२) 60984 के अभाज्य गुणनखंड करो।

$$\begin{array}{r|r} 2 & 60984 \\ \hline 2 & 30492 \\ \hline 2 & 15246 \\ \hline 3 & 7623 \\ \hline 3 & 2541 \\ \hline 7 & 847 \\ \hline 11 & 121 \end{array}$$

अतः $60984 = 2\times2\times2\times3\times3\times7\times11\times11$

इस परिणाम को थोड़े से अक्षरों में इस प्रकार प्रकट कर सकते हैं :—

$2^3\times3^2\times7\times11^2$ उत्तर

उदाहरण (३) $15a713b$ यदि 88 पर पूरा बंट सकता हो तो a और b के मूल्य निकालो। $88=11\times8$

यह संख्या 8 से बंट सकती है इस कारण इसके अन्तिम तीन अंक 8 पर बंटने चाहियें।

$\therefore 13b$ को 8 पर बंट जाना चाहिए।

[किन्तु $17\times8=136$] $\therefore b=6$

अब संख्या $=15a7136$

यह संख्या 11 पर बंट सकती है।

अतः $6+1+a+1=3+7+5$

या $a+8=15$

या $a=7$

$a=7, b=6$ उत्तर

प्रश्नावली २६

बिना भाग दिये बताओ कि नीचे लिखी संख्याएँ 5,8,10,11,12 और 15 से बंट सकती हैं या नहीं।

(१) 328 (२) 1355 (३) 2952
(४) 4520 (५) 9550 (६) 18955
(७) 758985 (८) 595210 (९) 289575
(१०) 778775.

बिना भाग दिये बताओ कि नीचे लिखी संख्याएँ 6, 12, 20 और 25 पर बंट सकती हैं या नहीं।

(११) 636 (१२) 7896 (१३) 85560
(१४) 989898 (१५) 765432

अभाज्य गुणनखण्ड करो:—

(१६) 117 (१७) 289 (१८) 625
(१९) 890 (२०) 754 (२१) 975
(२२) 1230 (२३) 3000

नीचे लिखी संख्याओं में कौन कौन सी संख्याएँ अभाज्य हैं? इनमें जो संख्याएँ संयुक्त हैं उनके अभाज्य गुणनखण्ड करो:—

(२४) 51 (२५) 93 (२६) 121 (२७) 321 (२८) 891
(२९) 18018 (३०) 17017

(३१) नीचे लिखी संख्याओं में छूटे हुए अंक इस प्रकार भरो कि वह संख्याएँ (क) 9 से (ख) 11 से पूरी पूरी बंट जावें।

[illegible], [illegible], [illegible], [illegible]

(३२) 778596 के गुणनखण्ड करो और दिखाओ कि यह संख्या तीन लगातार संख्याओं का गुणनफल है।

(३३) सिद्ध करो कि [illegible] और [illegible] अभाज्य संख्याएँ हैं।

(३४) सिद्ध करो कि [illegible] और [illegible] अभाज्य संख्याएँ हैं।

(१५) सिद्ध करो कि (१) 5673, 7318, (२) 9947, 7987, परस्पर अभाज्य हैं।

(१६) बताओ 37 को किस संख्या से गुणा करें कि गुणनफल 111 हो जाय।

(१७) 31531 के दाहिनी ओर क्या अंक रखें कि यह संख्या 91 से पूरी पूरी बंट जाय।

(१८) चार क्रमागत संख्यायें हैं। पहली तीन संख्याओं का गुणनफल 1717 है और अन्तिम तीन संख्याओं का गुणनफल 3081 है। संख्यायें बताओ।

(१९) यदि $123a45b$, 88 से पूरी बंट सकती हो तो a और b के मूल्य बताओ।

(२०) 2,3,3,4 इन अंकों से ऐसी संख्या बनाओ जो 264 से पूरी पूरी बंट जाय।

गुणनखण्ड बनाकर वर्गमूल निकालना

उदाहरण (१) 324 का वर्गमूल निकालो।

क्रिया $\sqrt{324} = \sqrt{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}$

$= 2 \times 3 \times 3$

$= 18$ उत्तर

उदाहरण (२) 1089 का वर्गमूल निकालो।

क्रिया
$$\begin{array}{r|l} 3 & 1089 \\ \hline 3 & 363 \\ \hline & 121 \end{array}$$

$\sqrt{1089} = \sqrt{11 \times 11 \times 3 \times 3}$

$= \sqrt{11^2 \times 3^2}$

$= 11 \times 3$

$= 33$ उत्तर

उदाहरण (३) 75 को किस छोटी से छोटी संख्या से गुणा करें कि गुणनफल एक पूरा वर्ग हो जाय ?

क्रिया $75 = 5 \times 5 \times 3$

$= 5^2 \times 3$

अतः यदि इसको 3 से गुणा किया जाय तो गुणनफल एक पूरा वर्ग होगा। उत्तर

प्रश्नावली २७

निम्नलिखित संख्याओं का वर्गमूल गुणनखण्ड बनाकर निकालो —

(१) 576 (२) 1024 (३) 1296
(४) 2304 (५) 1936 (६) 2916
(७) 9216 (८) 16384 (९) 105625
(१०) 1234321

(११) निम्नलिखित संख्याओं को किस छोटी से छोटी संख्या से गुणा करें कि गुणनफल एक पूरा वर्ग बन जाय ?

50; 72; 96; 128; 245; 768; 887; 1125; 5120.

(१२) निम्नलिखित संख्याओं को कौन सी छोटी से छोटी संख्या से भाग दें कि भजनफल पूरा वर्ग बन जाय ?

32; 75; 126; 192; 108, 375; 847; 343, 864.

वर्गमूल निकालने की साधारण विधि

यह तो विद्यार्थियों को पहले ही पता है कि 1 का वर्गमूल 1; 4 का 2; 9 का 3; 16 का 4; 25 का 5; 36 का 6; 49 का 7; 64 का 8; 81 का 9; और 100 का 10 होता है।

अब क्योंकि 1 का वर्गमूल 1 है और 100 का 10 है इसलिए जो संख्या 1 और 100 के बीच की है उसका वर्गमूल 10 से कम होगा, और 10 से कम संख्या में एक अंक होता है; अतः 1 और 100 के बीच की किसी भी संख्या के वर्गमूल में एक अंक की ही संख्या होगी।

इसी प्रकार 100 का वर्गमूल 10 है; और 10000 का वर्गमूल 100 है; इसलिए 100 से 10000 तक की सब संख्याओं का वर्गमूल 10 और 100 के बीच वाली कोई संख्या होगी, अर्थात् 3 या 4 अंकों वाली संख्याओं का वर्गमूल कोई दो अंकों वाली संख्या होगी। इसी प्रकार 5 या 6 अंकों वाली संख्याओं का वर्गमूल कोई 3 अंकों वाली संख्या होगी।

अब यदि किसी संख्या के अंकों की संख्या सम हो तो उस के वर्गमूल के अंकों की संख्या उस से आधी होगी।

उदाहरणतः यदि संख्या में [illegible] अंक हों तो वर्गमूल में [illegible] अंक होंगे।

यदि किसी संख्या में अंकों की गिनती विषम हो, जैसे 3, 5, 7, 9 इत्यादि, तो उसके वर्गमूल में अंकों की गिनती $\frac{3+1}{2}, \frac{5+1}{2}, \frac{7+1}{2}, \frac{9+1}{2}$, अर्थात्, 2, 3, 4, 5, होगी।

इस विधि द्वारा हम तुरन्त जान सकते हैं कि किसी संख्या के वर्गमूल में कितने अंक होंगे। इसलिए किसी संख्या का वर्गमूल निकालने समय पहले इकाई से आरम्भ करके एक एक अंक छोड़ कर अंकों के ऊपर बिन्दु लगा देते हैं। जितने बिन्दु होंगे उतने ही वर्गमूल के अंक होंगे।

उदाहरणतः 2 5 6 के वर्गमूल में 2 अंक होंगे,
और 1 2 2 5 के वर्गमूल में भी 2 अंक होंगे,
और 1 2 4 6 0 9 के वर्गमूल में 3 अंक होंगे।

तुम पहले पढ़ चुके हो कि $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
$= a^2+b(2a+b)$

इसी प्रकार (दहाई + इकाई)² =
(दहाई)² + इकाई (2 × दहाई + इकाई)

उदाहरण (1) 17 का वर्ग ऊपर की रीति से निकालो।

क्रिया $17^2 = (10+7)^2$
$= 10^2 + 7(2 \times 10 + 7)$
$= 100 + 7(20 + 7)$
[illegible]

[illegible]

[illegible]

यह क्रिया इस प्रकार लिखी जा सकती है।

```
              1  8
        10 |  3 2 4
           |  1 0 0
10×2+8 = 28|  2 2 4
              2 2 4
              ×        वर्गमूल = 18 उत्तर
```

उदाहरण (३) 1225 का वर्गमूल निकालो।

क्रिया:—

```
              3  5
      30    1 2 2 5
              9 0 0
30×2+5 = 65   3 2 5
              3 2 5
              ×
```

वर्गमूल = 35

संक्षिप्त रूप में यह क्रिया इस प्रकार लिखी जाती है।

```
         3  5
  3    1 2 2 5
         9
  65     3 2 5
         3 2 5
         ×
```

35 उत्तर

उदाहरण (४) 124609 का वर्गमूल निकालो।

क्रिया—

```
          3  5  3
   3    1 2 4 6 0 9
          9
   65     3 4 6
          3 2 5
   703      2 1 0 9
            2 1 0 9
```

वर्गमूल = 353 उत्तर

क्रिया $\sqrt{\frac{256}{625}} = \sqrt{\frac{16^2}{25^2}} = \frac{16}{25}$ उत्तर

उदाहरण (६) $1\frac{464}{625}$ का वर्गमूल निकालो।

क्रिया $\sqrt{1\frac{464}{625}} = \sqrt{\frac{1089}{625}}$

$= \frac{\sqrt{1089}}{\sqrt{625}}$

```
       3  3
 3 | 1 0 8 9
   |   9
 63      1 8 9
         1 8 9
           ×
```

$= \frac{33}{25}$

$= 1\frac{8}{25}$ उत्तर

प्रश्नावली २८

निम्नलिखित संख्याओं का वर्गमूल निकालो :—

(१) 196 (२) 529 (३) 576
(४) 1024 (५) 1089 (६) 2116
(७) 2704 (८) 2809 (९) 3969
(१०) 4356 (११) 5184 (१२) 9801
(१३) 3481 (१४) 16384 (१५) 105625
(१६) 19044 (१७) 57600 (१८) 27556
(१९) 255025 (२०) 521234 (२१) 1234321
(२२) 36072036 (२३) 98069409 (२४) 289170025
(२५) 429135971041
(२६) $2\frac{1}{4}$ (२७) $13\frac{4}{9}$ (२८) [illegible]
(२९) [illegible] (३०) $44\frac{4}{9}$ (३१) $105\frac{1}{16}$
(३२) $1\frac{144}{625}$ (३३) [illegible] (३४) [illegible]

(३५) $\sqrt{14[illegible] \times 2[illegible] \times [illegible]}$ का मूल्य बताओ।

दशमलव का वर्गमूल

उदाहरण ७ 1280.9241 का वर्गमूल निकालो।

क्रिया —

1280.9241

क्रिया

```
         1 7 9 3 6 8
   1   | 321 73025000
       | 1
  27   | 221
       | 189
 349   | 3273
       | 3141
 3583  |  13202
       |  10749
 35866 |   245350
       |   215196
 358728|    3015400
       |    2869824
       |     145576
```

वर्गमूल = 17·9368 उत्तर

प्रश्नावली २९

निम्नलिखित के वर्गमूल निकालो :—

(१) 46·24 (२) 1·4161 (३) 86·49

(४) 5·3361 (५) 100·2001 (६) 133·6336

(७) ·000025 (८) ·000529 (९) 70702·81

(१०) ·08450649 (११) 58035·4609

(१२) ·49434961 (१३) ·00053049

(१४) $\frac{\cdot 1}{9\cdot 1}$ (१५) $\frac{25\cdot 6}{52\cdot}$ (१६) $\frac{36\cdot 1}{102\cdot 4}$

निम्नलिखित के वर्गमूल दशमलव के चार अंकों तक निकालो —

(१७) $\frac{1}{3}$ (१८) ४

2 का वर्गमूल दशमलव के चार अंकों तक निकालो।

क्रिया

```
          1·4 1 4 2
    1   | 2·00000000
        | 1
   24   | 100
        | 96
  281   | 400
        | 281
 2824   | 11900
        | 11296
28282   | 60400
        | 56564
```

1·4142 उत्तर

निम्नलिखित का वर्गमूल दशमलव के चार अंकों तक निकालो :—

(२०) 3 (२१) 5 (२२) 7

(२३) ·9 (२४) ·121 (२५) 62·5

(२६) एक वर्गाकार खेत का क्षेत्रफल $2\frac{1}{4}$ एकड़ है, उसकी एक भुजा की लम्बाई बताओ।

(२७) कुछ मनुष्यों ने 96 रुपये चन्दा दिया, प्रत्येक मनुष्य ने उतनी ही दुअन्नियां दीं जितने मनुष्य थे। बताओ हर एक ने क्या दिया ?

(२८) एक वर्गाकार खेत का क्षेत्रफल 10 एकड़ है, उसके चारों ओर बाड़ लगाने का खर्च 2 आने 6 पाई प्रति गज की दर से मालूम करो।

(२९) एक उद्यान में 22801 आम के वृक्ष इस प्रकार लगाये गये हैं कि वृक्षों की जितनी पंक्तियां हैं उतने ही प्रत्येक पंक्ति में वृक्ष हैं। बताओ, उन वृक्षों की कितनी पंक्तियां हैं ?

(१०) एक वर्गाकार खेत का क्षेत्रफल [illegible] एकड़ है। बताओ, उसके चारों ओर 4 मील प्रति घंटा की चाल से कोई मनुष्य कितने समय में चक्कर कर सकेगा?

(११) एक आयत की लम्बाई 14 गज 2 फुट है और चौड़ाई 3 गज 2 फुट है। यदि उसके बराबर एक वर्ग बनाया जाय तो वर्ग की भुजा कितनी होगी?

(१२) बताओ, 8600 में से क्या घटायें कि पूरा वर्ग बन जाय?

(१३) 5700 में क्या जोड़ दें कि पूरा वर्ग बन जाय?

(१४) वह संख्या मालूम करो जिसका वर्ग 1083 और 4460 के योगफल के बराबर हो।

(१५) बताओ, 1800 और 2400 के बीच में कितनी ऐसी संख्याएं हैं जो पूरे वर्ग हैं?

(१६) एक रेजीमेंट में 68246 सिपाही हैं। जब उनको एक ठोस वर्ग के आकार में खड़ा किया गया तो 125 सिपाही बच रहे। बताओ, सामने की पंक्ति में कितने सिपाही हैं?

(१७) एक सेनापति अपने 11589 सैनिकों को एक ठोस वर्ग के आकार में खड़ा करना चाहता है। उसने देखा कि इस वर्ग को पूरा करने के लिए उसे 75 और सैनिकों की आवश्यकता होगी। बताओ, इस वर्ग की सामने वाली पंक्ति में कितने सैनिक होंगे?

घन मूल

(१) घन मूल—यदि किसी संख्या के तीन समान गुणनखण्ड हों तो इनमें से प्रत्येक गुणनखण्ड को उस संख्या का घनमूल कहते हैं।

जैसे 2 का घन 8 है, 8 का घन मूल 2

3 का घन 27 है, 27 का घन मूल 3।

4 का घन 64 है ; 64 का घन मूल 4

5 का घन 125 है ; 125 का घन मूल 5

$2 \times 2 \times 2$ को 2 की तीसरी शक्ति कहते हैं और इसे इस प्रकार लिखते हैं 2^3 । इसी प्रकार $3 \times 3 \times 3$ को इस प्रकार लिखते हैं 3^3 इत्यादि ।

घनमूल का चिन्ह $\sqrt[3]{}$ यह है । इस चिन्ह को सदा उस संख्या से पहले लिखते हैं जिसका घनमूल लेना हो ।

(२) गुणनखण्ड बनाकर संख्याओं का घनमूल प्रतीत करना ।

यदि हम किसी संख्या के गुणनखण्ड बनाकर उन गुणनखण्डों को तीन भागों में इस प्रकार बांटे कि प्रत्येक भाग में समान गुणनखण्ड हों, तो इनमें से प्रत्येक भागको उस संख्या का घनमूल कह सकते हैं ।

उदाहरण (१) 39304 का घनमूल प्रतीत करो ।

2 | 39304
2 | 19652
2 | 9826
17 | 4913
17 | 289
  17

यहां $39304 = 2 \times 2 \times 2 \times 17 \times 17 \times 17$

$= 2 \times 17 \times 2 \times 17 \times 2 \times 17$

अतः घनमूल $= 2 \times 17$

$= 34$ उत्तर

उदाहरण (२) 456533 का घनमूल निकालो ।

7 | 456533
7 | 65219
7 | 9317
11 | 1331
11 | 121
  11

$456533 = 7 \times 7 \times 7 \times 11 \times 11 \times 11$

$= 7^3 \times 11^3$

$\sqrt[3]{456533} = 7 \times 11$

$= 77$ उत्तर

प्रश्नावली ३०

गुणनखण्ड बनाकर निम्नलिखित राशियों का घनमूल प्रतीत करो :—

(१) 4913	(२) 6859	(३) 12167
(४) 19683	(५) 29791	(६) 46656
(७) 91125	(८) 512000	(९) 704969
(१०) 1157625	(११) 729000000	(१२) 2773505125
(१३) 0·27	(१४) 32·768	(१५) 423564·751

∴ गाड़ी की औसत चाल = [illegible] मील प्रति घण्टा

= 43[illegible] मील प्रति घण्टा उत्तर

उदाहरण (४) एक श्रेणी में 30 छात्र थे। इनकी अवस्थाओं का मध्यमान 15·8 वर्ष था। इस श्रेणी में 5 छात्र और भरती किये गये। इनकी अवस्थाओं का मध्यमान 16·2 वर्ष है। बताओ अब इस श्रेणी के छात्रों की अवस्थाओं का मध्यमान क्या होगया है?

पहले 30 छात्रों की अवस्थाओं का योगफल = $15·8 \times 30$

= 474 वर्ष

5 नये छात्रों की अवस्थाओं का योगफल = $16·2 \times 5$

= 86 वर्ष

35 छात्रों की अवस्थाओं का योगफल = $474 + 86$

= 560 वर्ष

∴ अब श्रेणी के सब छात्रों की

अवस्थाओं का मध्यमान = $560 \div 35$

= 16 वर्ष उत्तर

प्रश्नावली ३१

(1) एक लड़के की आयु 13 वर्ष है, दूसरे की आयु 17 वर्ष और तीसरे की 6 वर्ष। बताओ इन तीनों की औसत आयु कितनी है?

(2) सोमवार को मेरी आय 20 रुपये था, मंगलवार को 25 रुपये, बुधवार को [illegible] रुपये और बृहस्पतिवार को 50 रुपये। मेरी एक दिन की औसत आय बताओ।

1. [illegible]

$4\frac{1}{2}$, 4 प्रतिशत लाभ बांटा गया। बताओ आठवें वर्ष कितने प्रतिशत लाभ बांटा गया।

(१५) सात ग्रामों की औसत जन संख्या 1000 है यदि पहले छः ग्रामों की जन संख्या क्रमशः 980, 1023, 945, 900, 1100 और 803 हो, तो सातवें ग्राम की जन संख्या प्रतीत करो।

(१६) एक श्रेणी में 35 बालक हैं। उनका औसत भार 34 पौंड है उस श्रेणी में एक नया बालक भरती हुआ, तो श्रेणी का औसतभार 35 पौंड होगया। नये बालक का भार बताओ।

(१७) 20 बालकों की एक श्रेणी में एक बालक की अवस्था 13 वर्ष दो मास है। यदि यह बालक चला जाय और इस के स्थान पर एक नया बालक भरती कर लिया जाय, तो सब बालकों की अवस्थाओं का औसत दो महीने अधिक हो जाय। बताओ नये बालक की अवस्था क्या है?

(१८) यदि 12 स्काउटों की टोली में से एक स्काउट जिसकी ऊंचाई 5 फुट 4 इंच है चला जाय और उसके स्थान पर एक नया स्काउट भरती कर लिया जाय, तो टोली की औसत ऊंचाई $\frac{1}{4}$ इंच घट जायगी। नये स्काउट की ऊंचाई बताओ।

(१९) अब से तीन वर्ष पहले एक परिवार के 5 व्यक्तियों की औसत आयु 17 वर्ष थी, कुछ समय के पश्चात् एक बालक उत्पन्न हुआ। अब उस परिवार की औसत पहले जितनी ही है। बताओ बालक की आयु इस समय कितनी है?

(२०) एक समिति में 6 सदस्य हैं। पहले 5 सदस्यों में से प्रत्येक ने 25 रुपये चन्दा दिया और छटे सदस्य ने सब सदस्यों के चन्दों के मध्यमान से 7 रुपये अधिक दिये। बताओ कुल कितना चन्दा इकट्ठा हुआ?

दसवाँ अध्याय

प्रतिशत या प्रति सैंकड़ा

प्रतिशत या प्रति सैंकड़ा का अर्थ 'सौ पीछे' या 'सौ पर' है।

यह उदाहरण देखो :—

सन् 1904 के आरम्भ में रोहतासपुर की जन संख्या 56350 थी, जो वर्ष के अन्त में 58694 हो गई। उसी वर्ष के आरम्भ में विजयपुर की जनसंख्या 178300 थी जो उसी वर्ष के अन्त में 183649 होगई। अब प्रश्न यह है कि किस नगर की जन संख्या में अधिक वृद्धि हुई है।

ऊपर से यह तो स्पष्ट विदित होरहा है कि विजयपुर की जनसंख्या एक वर्ष में जितनी बढ़ी है उतनी रोहतासपुर की नहीं बढ़ी। परन्तु इससे हम यह परिणाम नहीं निकाल सकते कि विजयपुर की जनसंख्या रोहतासपुर से अधिक बढ़ रही है। हां, यदि यह पूछा जाय कि दोनों नगरों के हर 100 मनुष्यों के पीछे वर्षभर में कितनी जनसंख्या बढ़ी तो हम इन दोनों नगरों की जनसंख्या में वार्षिक बढ़ोतरी की तुलना कर सकते हैं और यह बता सकते हैं कि विजयपुर की जनसंख्या में अधिक वृद्धि हुई या रोहतासपुर की जनसंख्या में। इस सिद्धान्त के अनुसार हम दोनों नगरों की जनसंख्या में जो प्रतिशत बढ़ोतरी हुई उसे प्रतीत करते हैं।

रोहतासपुर की जनसंख्या
में जो वृद्धि वर्ष भर में हुई

...तः एक मनुष्य पीछे जो ...द्धि हुई $\Bigg] = \frac{2254}{56350}$

... प्रतिशत वृद्धि $= \frac{2254 \times 100}{56350}$

$= 4$

...जयपुर की जन संख्या में ... वृद्धि वर्ष भर में हुई $\Bigg] = 183649 - 178300 = 5349$

...तः एक मनुष्य पीछे जो ...द्धि हुई $\Bigg] = \frac{5349}{178300}$

प्रतिशत वृद्धि $\Bigg] = \frac{5349 \times 100}{178300}$

$= 3$

विजयपुर की जनसंख्या की यथार्थ वृद्धि रोहतासपुर की जनसंख्या ... यथार्थ वृद्धि से चाहे अधिक है, किन्तु दोनों नगरों की जनसंख्या की ...तिशत वृद्धि की तुलना करने पर प्रतीत हुआ कि विजयपुर की जन...ख्या में उतनी वृद्धि नहीं हो रही जितनी रोहतासपुर की जनसंख्या ...।

ऊपर की व्याख्या से यह स्पष्ट है कि प्रतिशत का आशय वह ...पत्ति या भिन्न है जिसका हर 100 हो। जैसे 23 प्रतिशत का अर्थ $\frac{23}{100}$ यह बात आगे आकर मालूम हो जायेगी कि प्रतिशत के प्रश्न ...कालने में अनुपात के नियम से काम लिया जाता है।

प्रतिशत के प्रश्नों की क्रिया करने की रीति नीचे लिखे ...हरणों से समझ में आ जायगी।

उदाहरण (१) $\frac{2}{5}$ को प्रतिशत या प्रति सैंकड़ा दर के रूप में ...ट करो।

$\ldots = \frac{40}{100} = 40$ प्रतिशत

इस परिणाम का यह अर्थ हुआ कि किसी संख्या का $\frac{2}{5}$ उस संख्या के 40 प्रतिशत के बराबर है।

उदाहरण (२) किसी संख्या का 75 प्रतिशत उस संख्या का कौनसा भिन्न है ?

75 प्रतिशत $= \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$

नोट:—100 प्रतिशत $= \frac{100}{100} = 1$ अर्थात्, पूर्ण संख्या। यदि किसी परीक्षा में सब अंकों की गणना 375 हो और कोई विद्यार्थी 375 अंक प्राप्त करे तो कहा जाता है कि उसने 100 प्रतिशत अंक प्राप्त किये हैं। इसी प्रकार यदि कोई मनुष्य साल भर में इतना धन व्यय करे जितनी उसकी आय हो; तो कहा जाता है कि उसका व्यय उसकी आय का 100 प्रतिशत है।

(४) हल किये हुए उदाहरण

उदाहरण (१) एक पाठशाला में 720 विद्यार्थी पढ़ते हैं। उनमें से 36 की आयु 16 वर्ष से अधिक है। बताओ कितने प्रतिशत विद्यार्थियों की आयु 16 वर्ष से अधिक है ?

इष्ट उत्तर $= \frac{36}{720} = \frac{1}{20} = \frac{5}{100}$

$=$ 5 प्रतिशत   उत्तर

उदाहरण (२) सन् 1905 में भारतवर्ष में 5581 नई पुस्तकें छपीं। इनमें से 1544 उपन्यास थे। बताओ, उपन्यास कुल पुस्तकों का कितने प्रतिशत थे ?

इष्ट उत्तर $= \frac{1544}{5581} =$ .28 लगभग

$= \frac{28}{100}$ लगभग

$=$ लगभग 28 प्रतिशत   उत्तर

उदाहरण (३) एक रुपया ४ आने, 10 रुपये का कौन सा प्रतिशत भाग है ?

इस प्रकार $=\frac{1\frac{1}{4}}{10}+100=\frac{12\frac{1}{2}}{100}$

$=12\frac{1}{2}$ प्रतिशत

उदाहरण (४) 1250 का 6 प्रतिशत प्रतीत करो।

1250 का 6 प्रतिशत $=1250\times\frac{6}{100}$

$=\frac{750}{10}$

$=75$ उत्तर

उदाहरण (५) 84 पौंड 10 शिलिंग का 14 प्रतिशत बताओ।

84 पौंड 10 शि० का 14 प्रतिशत $=84\frac{1}{2}$ पौं० $\times\frac{14}{100}$

$=\frac{169}{2}\times\frac{14}{100}$

$=\frac{1183}{100}$ पौंड

$=11.83$ पौंड

$=11$ पौंड 16 शिलिंग $7\frac{1}{5}$ पैंस उत्तर

उदाहरण (६) यदि 8100 मनुष्य किसी नगर की जनसंख्या का 12 प्रतिशत हों तो उस नगर की समस्त जनसंख्या बताओ।

सारी जनसंख्या का $\frac{12}{100}=8100$

$\therefore$ सारी जनसंख्या का $\frac{1}{100}=\frac{8100}{12}$

अतः सारी जनसंख्या का $\frac{100}{100}=\frac{8100\times100}{12}$

$=67500$ उत्तर

उदाहरण (७) किसी पाठशाला में 30 प्रतिशत विद्यार्थी [illegible] विषयों में असफल हुए, [illegible] प्रतिशत दो विषयों में और [illegible] प्रतिशत एक विषय में। यदि पाठशाला में [illegible] विद्यार्थी पढ़ते हों तो बताओ कितने विद्यार्थी [illegible] असफल हुए।

∵ सफल विद्यार्थियों का प्रतिशत $= 20 + 36 + 32$
$= 88$

∴ असफल विद्यार्थियों का प्रतिशत $= 100 - 88 = 12$

अतः असफल विद्यार्थियों की संख्या $= \frac{12}{100} \times 750$
$= 90$ उत्तर

उदाहरण (८) भारत के पुराने सिक्कों में 40 भागों में से 37 भाग शुद्ध चान्दी होती थी और शेष खोट मिलाया जाता था। बताओ, शुद्ध चांदी कितने प्रतिशत होती थी?

∵ 40 भागों में से 37 शुद्ध चान्दी है

∴ एक भाग में से $\frac{37}{40}$ शुद्ध चान्दी है।

∴ 100 भागों में से $\frac{37}{40} \times 100$ शुद्ध चान्दी है

अतः इष्ट प्रतिशत $= \frac{37}{40} \times 100$
$= \frac{370}{4}$
$= 92 \cdot 5$ उत्तर

उदाहरण (९) एक मनुष्य ने 150 दुकानें 46240 रुपये को मोल लीं। दुकानों में कुछ सुधार करके यह दुकानें 15 रुपये प्रति दुकान की दर से किराये पर दे दीं। इस प्रकार उसे अपने सारे धन पर $4\frac{1}{2}$ प्रतिशत आय होने लगी। बताओ दुकानों को सुधारने में उसे क्या खर्च करना पड़ा था?

दुकानों का किराया $= 150 \times 15$ रुपये
$= 2250$ रुपये

किन्तु $4\frac{1}{2}$ रुपये किराये की पूंजी $= 100$ रुपये

∴ एक रुपया किराये की पूंजी $= (100 \times$ [illegible]$)$ रुपये

और 2250 रुपये किराये की पूंजी $= (100 \times 2250 \times \frac{2}{9})$ रुपये

$= 50000$ रुपये

अतः वह रुपया जो दुकानों को सुधारने पर खर्च हुआ $= 50000$ रुपये $- 46240$ रुपये

$= 3760$ रुपये उत्तर

उदाहरण (१०) एक व्यक्ति अपनी आय का 10 प्रतिशत बचाता है। हिसाब लगाने पर उसे मालूम हुआ कि यदि वह अपने व्यय में 10 प्रतिशत और वृद्धि कर दे तो केवल 100 रुपये बचेंगे। उसकी आय बताओ।

कल्पना करो कि उसकी आय $= 100$ रुपये

तो उसका खर्च $= 100 - 10 = 90$ रुपये।

अब यदि खर्च को 10 प्रतिशत बढ़ाया जाय, तो यह

$90 + 90 \times \frac{10}{100} = 99$ हो जायगा, और

बचत $= 100 - 99 = 1$ रुपया

किन्तु प्रश्न की शर्त के अनुसार बचत 100

अत, चूंकि उसकी आय का $\frac{1}{100}$ = 100 रुपये

आय = 10000 रुपये उत्तर

प्रश्नावली ३२

(१) एक मनुष्य की मासिक आय 624 रुपये है और खर्च आय का 75 प्रतिशत। बताओ, उसकी मासिक बचत कितनी है।

(२) एक मनुष्य ने [illegible] रुपये से व्यापार करना आरम्भ किया। पहले साल उसे 50 प्रतिशत लाभ हुआ। यह लाभ का धन उसने अपने पहले धन में मिला दिया और दूसरे वर्ष फिर व्यापार किया। परन्तु इस बार उसको केवल $\frac{1}{2}$ प्रतिशत लाभ हुआ। बताओ, दूसरे साल उसे कितने रुपये का लाभ हुआ।

) एक पाठशाला में 250 लड़के पढ़ते हैं। यदि उनमें से 225 लड़के उपस्थित हों, तो बताओ, कितने प्रतिशत लड़के पाठशाला नहीं आये।

) एक विद्यालय से 25 विद्यार्थी एण्टरेंस की परीक्षा में बैठे। उनमें से 64 प्रतिशत पास हो गये ? बताओ, कितने लड़के फेल हुए ?

१) एक धातु के टुकड़े में 23 भाग सोना, 2 भाग चाँदी और 5 भाग कलई है। बताओ उस धातु के टुकड़े में चाँदी कितने प्रतिशत है ?

६) एक धातु के पिंड में 17·25 पौंड टीन है और यह कुल तौल का 5·75 प्रतिशत है। धातु के पिंड का समस्त तौल बताओ।

७) किसी नगर में 36000 मनुष्य बसते हैं। इस नगर में 4750 बालक उत्पन्न हुए और मृत्यु के कारण 3070 मनुष्योंकी कमी होगई। बताओ वर्ष के अन्त में कितने प्रतिशत जन संख्या बढ़ गई।

८ एक सेना के 1 प्रतिशत सैनिक बीमारी से मर गये। शेष सेना के 14 प्रतिशत सैनिक लड़ाई में मारे गये। यदि अब 84024 सैनिक शेष रहे तो बताओ प्रारम्भ में कितने सैनिक थे ?

९ तीन नगरों की जनसंख्या सन् [illegible] में क्रमशः [illegible], [illegible] था [illegible] और [illegible] में पहिले दो नगरों की जनसंख्या [illegible] तथा [illegible] प्रतिशत बढ़ गई और तीसरे नगर की जनसंख्या [illegible] प्रतिशत घट गई। बताओ तीनों नगरों की समस्त जनसंख्या कितनी बढ़ अथवा घट गई।

१० एक व्यापारी को अपनी पूंजी के एक तिहाई पर 30 प्रतिशत, तथा चौथाई पर 45 प्रतिशत लाभ हुआ; और शेष पूंजी पर

15 प्रतिशत घाटा हुआ। बताओ, उसे सारी पूंजी पर कितने प्रतिशत लाभ हुआ ?

(११) एक व्यापारी ने 10000 पौंड से व्यापार प्रारम्भ किया। पहले वर्ष में उसे 10 प्रतिशत लाभ हुआ। इस लाभ को उसने मूलधन में ही मिला दिया। दूसरे वर्ष उसे 20 प्रतिशत लाभ हुआ और वह भी मूलधन में मिला दिया। तीसरे वर्ष फिर उसे 20 प्रतिशत लाभ हुआ। इस वर्ष उसने इस धन में से 6000 पौंड का एक खेत मोल ले लिया। बताओ, अब उस व्यापार में उस का कितना धन लगा हुआ है।

(१२) एक शिक्षालय में लड़के और लड़कियां इकट्ठे पढ़ते हैं। उस शिक्षालय के एक विभाग में 156 लड़के हैं। यह लड़के इस विभाग के विद्यार्थियों की संख्या का 65 प्रतिशत हैं। दूसरे विभाग में 162 लड़के हैं और यह उस विभाग के विद्यार्थियों की संख्या का 45 प्रतिशत हैं। बताओ, शिक्षालय में कितने प्रतिशत लड़के हैं।

(१३) एक व्यक्ति के पास 300 टन गुड़ और 65½ पौंड काफी है। गुड़ का मूल्य 1 पौंड 15 शिलिंग प्रति टन है। यदि गुड़ का मूल्य 6 प्रतिशत घट जाय और काफी का मूल्य [illegible] पेंस प्रति पौंड बढ़ जाय तो बताओ उसके धन में कितनी कमी या वृद्धि होगी ?

(१४) एक नगर की जनसंख्या पहले वर्ष से हर वर्ष 2.5 प्रतिशत बढ़ती है। यदि उसकी जनसंख्या 68921 हो, तो बताओ तीन वर्ष पहले उसकी जनसंख्या कितनी थी।

(१५) एक मनुष्य किराये के मकान में रहता है। मकान का किराया उसकी आय का [illegible] भाग है। किराया देने के पश्चात जो कुछ बचता है उसका [illegible] प्रतिशत भोजन वस्त्र आदि पर खर्च हो

जाता है। यदि उसकी वार्षिक बचत 1260 रुपये हो, तो उस की आय क्या है ?

(१६) किसी परीक्षा में 'A' ने समस्त अंकों का 48 प्रतिशत, और 'B' ने समस्त अंकों का 33 प्रतिशत अंक प्राप्त किये। यदि दोनों के अंकों का जोड़ 567 हो तो समस्त अंक बताओ।

(१७) $8\frac{1}{2}$ इंच लम्बी मोमबत्ती 12 आने प्रति दर्जन बिकती है इसी प्रकार की $10\frac{1}{2}$ इन्च लम्बी बत्ती 14 आने 8 पाई प्रति दर्जन बिकती है। बताओ कौन सी मोमबत्तियाँ सस्ती हैं और सस्ती मोमबत्तियाँ मोल लेने से मुझे कितने प्रतिशत बचत होगी ?

(१८) मैंने 10 रुपये के कुछ सेब लिये। यदि सेबों का मूल्य 20 प्रतिशत घट जाय तो मुझको 120 सेब अधिक मिलें। एक दर्जन सेबों का मूल्य बताओ।

(१९) एक दिवालिये की कुल सम्पत्ति का मूल्य 1832 पौंड है और उसको 21140 पौंड ऋण देना है। यदि दिवाले का खर्च उस के ऋण का $12\frac{1}{2}$ प्रतिशत हो, तो बताओ, ऋण दाताओं को एक पौंड में क्या मिलेगा ?

(२०) मेरे मकान का मूल्य 11400 रुपये और बीमे की दर 5 प्रतिशत है। मैं इस मकान का कितने रुपये का बीमा कराऊं कि यदि मकान नष्ट हो जाय तो मुझको मकान का मूल्य और बीमे का व्यय (प्रिमियम) दोनों प्राप्त हो जाएं ?

संकेत 100— =95

(रुपये की वस्तु को 100 रुपये का बनाया जाय)

(२१) [illegible] प्रतिशत पर [illegible] गिर गये। इसके पश्चात् [illegible] फेर [illegible] प्रतिशत [illegible] गये, यदि [illegible] इस समय [illegible] हो [illegible] बताओ [illegible] कुल कितने [illegible]

(२२) एक व्यक्ति 12 दिन में चार घण्टे प्रति दिन चल कर 360 मील की यात्रा समाप्त कर लेता है। यदि वह अपनी चाल 20 प्रतिशत अधिक कर ले और 450 मील की यात्रा 20 दिन में समाप्त करे, तो बताओ वह प्रतिदिन कितने घण्टे यात्रा करेगा ?

(२३) यदि किसी आयताकार क्षेत्र की लम्बाई 20 प्रतिशत बढ़ा दी जाय और चौड़ाई भी 20 प्रतिशत बढ़ा दी जाय, तो बताओ उसका क्षेत्रफल कितने प्रतिशत बढ़ जायगा ?

(२४) यदि किसी आयताकार क्षेत्र की लम्बाई 15 प्रतिशत बढ़ा दी जाये और उसकी चौड़ाई 15 प्रतिशत घटा दी जाये तो बताओ इसका क्षेत्रफल कितने प्रतिशत कम या अधिक हो जायगा ?

(२५) एक परीक्षा में सम्पूर्ण अंकों की संख्या 1000 थी। इसमें 'क' ने 'ख' से 20 प्रतिशत अधिक अंक प्राप्त किये और 'ख' ने 'ग' से 10 प्रतिशत अधिक, और 'ग' ने 'घ' से 20 प्रतिशत कम। यदि 'क' ने 660 अंक प्राप्त किये हों तो बताओ 'घ' ने कुल अंकों में से कितने प्रतिशत अंक प्राप्त किये ?

(२६) एक परीक्षा पत्र में 5 प्रश्न थे। 5 प्रतिशत लड़कों ने सारे प्रश्न हल किये। 5 प्रतिशत लड़कों ने किसी प्रश्न का भी उत्तर नहीं दिया। 20 प्रतिशत लड़कों ने केवल 1 प्रश्न हल किया, और 20 प्रतिशत लड़कों ने 4 प्रश्न हल किये। इसके अतिरिक्त 20 प्रतिशत लड़कों ने दो प्रश्न हल किये, तथा शेष 200 लड़कों ने 3 प्रश्न हल किये। बताओ परीक्षा में कितने विद्यार्थी बैठे थे ?

ग्यारहवां अध्याय

लाभ और हानि

जब कोई व्यापारी या दुकानदार व्यापार आरम्भ करता है तो उसे यह आशा होती है कि जिस मोल पर मैंने माल लिया है उससे अधिक मोल पर बेच दूंगा। यदि विक्रय मूल्य अर्थात् वह मूल्य जिस पर वह अपना माल बेचता है, क्रय मूल्य अर्थात् उस मूल्य से जिस पर उसने माल लिया था, अधिक हो, तो उसको लाभ होता है। अतः इस अवस्था में लाभ = विक्रय मूल्य — क्रय मूल्य। यदि विक्रय मूल्य, क्रय मूल्य से कम हो तो व्यापारी को हानि होती है।

उदाहरणतः यदि मैं एक मकान 2000 रुपये में मोल लूं और उसी समय 2500 रुपये में बेच डालूं तो मुझे 2500—2000 अर्थात् 500 रुपये लाभ होगा, और यदि उस मकान को 1800 रुपये में बेच दूं तो मुझको 2000—1800 = 200 रुपये हानि होगी।

यदि विद्यार्थी यह नियम समझलें तो उन्हें लाभ और हानि के प्रश्न हल करने में कोई कष्ट न होगा।—

(1) लाभ और हानि सदा क्रय मूल्य पर होता है।

(2) प्रश्न में यदि विक्रय मूल्य दिया हो तो क्रय मूल्य निकाल लिया जाय।

(3) प्रश्न में यदि लाभ और हानि प्रति सैंकड़ा दिया हुआ हो तो निम्नलिखित सिद्धान्तों द्वारा क्रय मूल्य और विक्रय मूल्य निकाला जा सकता है।

$$\text{क्रय मूल्य} = \frac{\text{विक्रय मूल्य} \times 100}{(100 + \text{लाभ\%}) \text{ या } (100 - \text{हानि\%})}$$

$$\text{विक्रयमूल्य} = \text{क्रय मूल्य} \times \frac{(100 + \text{लाभ\%}) \text{ या } (100 - \text{हानि\%})}{100}$$

उदाहरण (१) मैंने एक घड़ी 150 रुपये में मोल ली और 20 प्रतिशत लाभ से बेच दी, बताओ, मैंने घड़ी कितने में बेची और मुझे कितने रुपये का लाभ हुआ।

घड़ी का विक्रय मूल्य = 150 रुपये + 150 रुपये का 20 प्रतिशत
= 150 रुपये + $150 \times \frac{20}{100}$ रुपये
= 150 रुपये + 30 रुपये
= 180 रुपये
∴ लाभ = 180 रुपये − 150 रुपये
= 30 रुपये

अतः *विक्रय मूल्य* = 180 रुपये
और लाभ = 30 रुपये उत्तर

उदाहरण (२) एक व्यापारी के माल का विक्रय मूल्य उसके क्रय मूल्य से $12\frac{1}{2}$ प्रति सैंकड़ा अधिक है। यदि वह अपने ग्राहकों को विक्रय मूल्य पर 4% कमीशन दे, तो उसे प्रति सैंकड़ा कितना लाभ होगा?

मान लो कि क्रय मूल्य = 100
तो विक्रय मूल्य = $112\frac{1}{2}$

व्यापारी विक्रय मूल्य पर 4 प्रति सैंकड़ा कमीशन देता है
∴ कमीशन = $112\frac{1}{2}$ का 4 प्रति सैंकड़ा

अतः वास्तविक विक्रय मूल्य $= 112\frac{1}{2} - 4\frac{1}{2} = 108$

अतः लाभ $= 8$ रुपये

$\therefore$ उसका प्रतिसैंकड़ा लाभ $= 8$ उत्तर

उदाहरण (३) एक वस्तु के बेचने में $17\frac{1}{2}$ प्रति सैंकड़ा लाभ होता है, यदि कुल लाभ 56 रुपये 14 आने हो तो वस्तु का क्रय मूल्य बताओ।

जब $17\frac{1}{2}\%$ लाभ होता है तब क्रय मूल्य 100 है।

जब 1 लाभ होता है तब क्रय ,, $\frac{100 \times 2}{35}$

56 रुपये 14 आने अर्थात $\frac{455}{8}$ लाभ होता है तब

क्रय मूल्य $\frac{455}{8} \times \frac{100 \times 2}{35}$

$= 325$ रुपये

$\therefore$ क्रय मूल्य $= 325$ रुपये उत्तर

उदाहरण (४) 5 रुपये गज के भाव से बन्नात बेचने से 4 प्रति सैंकड़ा की हानि होती है, बताओ, मैं किस भाव से बेचूं कि 5 प्रतिशत लाभ प्राप्त हो ?

एक गज बन्नात का पहला विक्रय मूल्य $= 5$ रुपये

अतः एक गज बन्नात का क्रय मूल्य $= 5 \times \frac{100}{100-4} = 5 \times \frac{100}{96}$

और .. .. .. दूसरा विक्रय मूल्य = क्रय मूल्य $\times \frac{100+5}{100}$

= [illegible]

5 रुपये 7 आने 0 पाई उत्तर

उदाहरण (५) एक मकान 2100 रुपये में बेचने से 20 प्रतिशत हानि होती है यदि, वही मकान [illegible] रुपये में बेचा जाय तो बताओ कितने प्रतिशत लाभ अथवा हानि होगी

20 प्रतिशत हानि का अर्थ है 100 के 80

जब विक्रय मूल्य 80 है, तो क्रय मूल्य $=100$ रुपये

जब विक्रय मूल्य 1 है तो क्रय मूल्य $=\frac{100}{80}$

जब विक्रय मूल्य 2400 है तो क्रय मूल्य $=2400\times\frac{100}{80}$

$=3000$ रुपये

लाभ $=3500$ रु० $-$ 3000 रु० $=500$ रुपये

3000 पर लाभ $=500$ रुपये

1 पर लाभ $=\frac{500}{3000}$

100 पर लाभ $=\frac{100\times 500}{3000}$

अतः लाभ $16\frac{2}{3}$ प्रति सैकड़ा　　　उत्तर

प्रश्नावली ३३

(१) एक पुस्तक बेचने वाला एक पुस्तक को 7 रुपये 8 आने में मोल लेकर 15 प्रतिशत के लाभ से बेचता है, पुस्तक का विक्रय मूल्य निकालो।

(२) एक व्यापारी ने 300 गज कपड़ा 120 रुपये में मोल लिया और उसमें से 250 गज, 7 आने 6 पाई प्रति गज की दर से और शेष 3 आने प्रति गज की दर से बेचा, बताओ उसे कुल माल पर कितने प्रतिशत लाभ या हानि हुई?

(३) एक घड़ी 20 प्रतिशत के लाभ से 15 रुपये में बिकती है, घड़ी का क्रय मूल्य बताओ।

(४) एक व्यापारी को 150 गज कपड़ा 1 रुपये 1 आने प्रति गज के भाव से बेचने में 15 प्रतिशत की हानि रहती है, एक गज कपड़े का क्रय मूल्य बताओ।

(५) एक सोडा बोतल 6 रुपये 12 आने को बेचने से दुकानदार को 10

प्रतिशत लाभ हुआ; बताओ वह उस घोड़े को कितने में बेचे कि उसे 20 प्रतिशत लाभ हो।

(६) एक दुकानदार ने कुछ माल 5 प्रतिशत की हानि से 76 रुपये में बेचा बताओ वह उसे कितने में बेचे कि उसको 25 प्रतिशत लाभ हो?

(७) एक व्यापारी अपने माल पर क्रय मूल्य से 25 प्रति सैंकड़ा अधिक दाम डालता है; परन्तु अपने ग्राहकों को रोकड़ा दाम देने पर 5 प्रतिशत कमीशन काट देता है; बताओ उसको प्रतिशत क्या लाभ होता है?

(८) एक व्यापारी का विक्रय मूल्य क्रय मूल्य से 20 प्रतिशत अधिक है; यदि वह अपने ग्राहकों को विक्रय मूल्य पर 6 प्रतिशत कमीशन काट दे तो उसे कितने प्रतिशत लाभ होगा।

(९) एक व्यापारी अपनी लागत पर 15 प्रतिशत लाभ चाहता है; बताओ कि वह अपने माल का दाम क्रय मूल्य से कितने प्रतिशत अधिक रखे कि वह ग्राहकों को 8 प्रतिशत कमीशन दे सके।

(१०) एक खेत $12\frac{1}{2}$ प्रतिशत के लाभ पर 5[illegible]0 रुपये को बिका; यदि वही खेत 445 रुपये को बिकता तो क्या प्रतिशत हानि होती?

(११) एक व्यापारी [illegible] प्रतिशत की हानि में चाय बेचता है। यदि वह चाय का विक्रय मूल्य [illegible] पैसे प्रति [illegible] बढ़ा दे, तो उसे [illegible] प्रतिशत का लाभ हो। चाय का क्रय मूल्य प्रति पौंड बताओ।

(१२) एक कारीगर एक वस्तु को व्यापारी के हाथ [illegible] प्रतिशत लाभ [illegible] है और व्यापारी उस वस्तु को [illegible] दुकानदार के हाथ [illegible] प्रतिशत लाभ से बेचता है। दुकानदार उस वस्तु को

271 रुपये 13 आने में बेचकर 12 प्रतिशत लाभ उठाता है, बताओ वह वस्तु कारीगर को कितने में पड़ी थी ?

(१३) क एक बकरी को ख के हाथ 12 प्रतिशत लाभ से बेचता है, ख उस को ग के हाथ 15 प्रतिशत हानि से बेचता है, ग उसको घ के हाथ 29 रु० 12 आ० में बेचकर 20 प्रतिशत लाभ उठाता है, बताओ क को बकरी का क्या मूल्य देना पड़ा था ?

(१४) एक मनुष्य ने 250 नारंगियाँ मोल लीं। उसने 100 नारंगियाँ उतने मूल्य पर बेचीं जितने में उसने 250 मोल ली थीं, उसका प्रति सैंकड़ा लाभ बताओ।

(१५) एक व्यापारी ने 12 वस्तुएं 20 वस्तुओं के क्रय मूल्य पर बेचीं बताओ उसको कितने प्रतिशत लाभ हुआ।

(१६) एक व्यापारी ने एक वस्तु $12\frac{1}{2}$ प्रतिशत हानि से बेची। यदि उसे 5 रुपये अधिक मिलते तो केवल 10 प्रतिशत की हानि होती, वस्तु का क्रय मूल्य बताओ।

लाभ और हानि के कठिन प्रश्न

धोका देने वाला प्रश्न

उदाहरण (1) एक व्यक्ति ने दो मकान बेचे और प्रत्येक का 3000 रुपये मोल लिया। एक मकान पर उसे 5% लाभ हुआ और दूसरे पर 5% हानि। बताओ उसे इस व्यापार में कितने प्रतिशत लाभ या हानि हुई ?

विक्रय मूल्य 3000 रुपये

लाभ प्रतिशत 5

उदाहरण (७) एक कपड़े वाले ने 150 गज कपड़ा 350 रु
में मोल लिया और इतने में बेचा कि उसे 25 गज कपड़े के विक्र
मूल्य के बराबर हानि हुई। बताओ उसने यह कपड़ा किस दर से बे

150 गज का क्रय-मूल्य = 350 रुपये

इस कपड़े को बेचने से हानि 25 गज कपड़े के विक्रय-मूल्य
समान है।

अत: 150+25 या 175 गज कपड़े का विक्रय-मूल्य = 350 र

∴ 1 गज कपड़े का विक्रय-मूल्य = 350÷175 रुपये

अतः उसने वह कपड़ा 2 रुपये प्रतिगज की दर से बेचा। उत्तर

अथवा बीज गणित द्वारा

मान लो कि एक गज कपड़े का विक्रय-मूल्य = x रुपये,

तो $150x = 350 - 25x$

या $150x + 25x = 350$

या $175x = 350$

$\therefore x = 2$

उदाहरण (८) एक व्यापारी 30 मन खांड 5 प्रतिशत लाभ
और 40 मन खांड 15 प्रतिशत लाभ से बेचता है। यदि वह सारी
खांड 20 प्रतिशत लाभ से बेचता तो उसे 78 रुपये अधिक मिलते
एक मन खांड का क्रय-मूल्य बताओ।

कल्पना करो कि एक मन खांड का क्रय-मूल्य = 1 रुपया

∴ 30 मन का क्रय-मूल्य = 30 रुपये

30 मन पर 5% लाभ = 30 का 5%

= 30 [illegible]

[illegible] रुपये

और 40 मन खांड का क्रय-मूल्य = 40 रुपये

40 मन पर 15% लाभ = 40 का 15 प्रतिशत

$= 40 \times \frac{15}{100}$

= 6 रुपये

∴ इस प्रकार कुल लाभ = 1½ + 6 = 7½ रुपये

यदि वह 70 मन खांड 20 प्रतिशत लाभ से बेचे तो उसे 70 का 20 प्रतिशत लाभ होगा।

∴ कुल लाभ = 70 का $\frac{20}{100}$

= 14 रुपये

पहले सौदे की अपेक्षा उसे दूसरे सौदे में 14 − 7½ = 6½ अधिक लाभ होता है।

जब यह अन्तर 6½ रुपये है, तो एक मन का क्रय-मूल्य = 1 रुपया

जब अन्तर 78 रुपये है, तो 1 मन का क्रय-मूल्य

$= 1 \times \frac{2}{13} \times 78$

= 12 रुपये

अतः क्रय-मूल्य = 12 रुपये प्रति मन   उत्तर

उदाहरण (९) एक कम तोलने वाला दुकानदार जिस भाव अनाज लाता है उसी भाव बेच देता है। यदि वह ग्राहक को 5 सेर के स्थान पर 4 सेर 11 छटांक अनाज दे; तो बताओ उसे कितने प्रतिशत लाभ होता है?

∴ 4 सेर 11 छटांक पर लाभ = 5 सेर − (4 सेर 11 छटांक)

= 5 छटांक

4 सेर 11 छटांक या [illegible] छटांक पर लाभ = [illegible] छटांक

∴ [illegible] छटांक पर लाभ = [illegible] छटांक

$$=\frac{20}{3}=6\frac{2}{3}$$

अतः लाभ प्रतिशत $=6\frac{2}{3}$ उत्तर

उदाहरण (१२) एक मनुष्य एक वस्तु मोल लेता है और उसको 20 प्रतिशत लाभ से बेच देता है। यदि इस वस्तु का क्रयमूल्य 20 प्रतिशत कम होता और वह उस वस्तु को पहले से 15 शिलिंग कम में बेचता, तो उसे 25 प्रतिशत लाभ होता। वस्तु का क्रय-मूल्य बताओ।

कल्पना करो कि क्रय-मूल्य $=x$ रुपये

तो पहला विक्रय-मूल्य $=x\times\frac{120}{100}=\frac{6x}{5}$

दूसरा क्रय-मूल्य $=x\times\frac{80}{100}=\frac{4}{5}x$

दूसरा विक्रय-मूल्य $=\frac{4}{5}x\times\frac{125}{100}=x$

दोनों विक्रयमूल्यों में अन्तर $=\frac{6}{5}x-x=\frac{x}{5}$

यह अन्तर प्रश्न में 15 शिलिंग बताया गया है

अतः $\frac{x}{5}=15$

या $x=75$ शिलिंग

अतः क्रय मूल्य = 3 पौंड 15 शिलिंग

यदि यह प्रश्न [illegible] हो न हल करना हो, तो सावधानी से किया करो अथवा प्रश्न को इस प्रकार पढ़ना था —

एक मनुष्य एक वस्तु मोल लेता है और उसको 20 प्रतिशत [illegible] । यदि इस वस्तु का क्रय-मूल्य 20 प्रतिशत कम होता [illegible] 25 प्रतिशत लाभ पर बेचता, तो

उस वस्तु का विक्रयमूल्य पहले से १५ शिलिंग कम होता। क्रयमूल्य ज्ञात करो।

अब कल्पना करो कि क्रयमूल्य = 100 शिलिंग

तो पहला विक्रयमूल्य = 120 शिलिंग

दूसरा क्रयमूल्य = 80 शिलिंग

दूसरा विक्रयमूल्य = 8 × [illegible]

= 100 शिलिंग

विक्रय मूल्यों में अन्तर = 120 − 100

= 20 शिलिंग

जब यह अन्तर 20 शिलिंग है तो क्रयमूल्य = 100

.. .. .. 1 .. .. = $\frac{100}{20}$

.. .. .. 15 .. .. = $\frac{100}{20} \times 15$

= 75 शिलिंग

= 3 पौंड 15 शिलिंग

प्रश्नावली ३४

(१) एक मनुष्य किसी वस्तु को 10 प्रतिशत की हानि से बेचता है। यदि उसे 5½ रुपये अधिक मिल जावें, तो 12½ प्रतिशत लाभ होगा। बताओ उस वस्तु का क्रयमूल्य क्या है?

(२) दूध का मोल 25 प्रतिशत बढ़ गया है। बताओ मुझको कितने प्रतिशत दूध कम लेना चाहिये कि मेरा खर्चा न बढ़े?

(३) एक व्यापारी एक साइकिल के लिखे हुए मोल का 25 प्रति सैकड़ा कमीशन देकर भी 25 प्रति सैकड़ा लाभ उठाता है। बताओ वह एक साइकिल का कितने प्रति सैकड़ा मोल अधिक लिखता है।

(४) मैंने कुछ घोड़े [illegible] पौंड में मोल लिये। उनमें से एक को मैंने

15 प्रतिशत की हानि और दूसरे को 10 प्रतिशत के लाभ पर बेच दिया। यदि दोनों घोड़ों का विक्रयमूल्य बराबर हो, तो हर एक घोड़े का क्रयमूल्य प्रतीत करो।

(५) एक रुपये की 12 नारंगियाँ बेचने से मुझे 10 प्रतिशत हानि होती है। बताओ एक रुपये की कितनी नारंगियाँ बेचूं कि मुझे 35 प्रतिशत लाभ हो?

(६) एक व्यापारी एक वस्तु को कुछ प्रतिशत हानि से बेच रहा है। यदि उस वस्तु का विक्रयमूल्य 40 प्रतिशत अधिक हो जाय तो उसको 20 प्रतिशत लाभ हो। बताओ वह उस वस्तु को कितने प्रतिशत हानि से बेच रहा है।

(७) 7 रुपये 8 आने प्रति मन दूध बेचने से एक ग्वाले को 10 प्रतिशत हानि होती है। बताओ वह कितने आने प्रति सेर के भाव से दूध बेचे कि उसको 10 प्रतिशत लाभ हो?

(८) 10 आने प्रति दर्जन के भाव नारंगियाँ बेचने से एक स्त्री को $7\frac{1}{2}$ प्रतिशत हानि उठानी पड़ती है। यदि वह 12 आने को 10 नारंगियाँ बेचे तो उसे कितना प्रतिशत लाभ या हानि होगी?

(९) एक कुंजड़े का सेर का बाट 15 छटांक का है। वह एक रुपये सेर अंगूर मोल लेकर 1 रुपये सेर के भाव ही बेच रहा है। बताओ वह कितना प्रतिशत लाभ उठा रहा है।

(१०) 21 पुस्तकों का क्रयमूल्य 18 पुस्तकों के विक्रयमूल्य के बराबर है। प्रतिशत लाभ बताओ।

(११) किसी [illegible] के विक्रयमूल्य में [illegible] प्रतिशत की कमी करने से [illegible] प्रतिशत [illegible] होती है। बतलाओ उसको [illegible] क्रयमूल्य [illegible] प्रतिशत [illegible]?

(१२) एक घोड़ा 120 रुपये में बेचने से क्रयमूल्य के ? [illegible]
बराबर लाभ होता है। क्रयमूल्य बताओ।

(१३) एक लड़के ने कुछ कलमें एक आने के चार-चार और उतनी ही
कलमें एक आने के पाँच-पाँच के भाव से मोल लिये, और उन
मिलाकर दो आने के नौ-नौ के भाव से बेच दिया। बता[ओ]
उसको कितने प्रतिशत लाभ या हानि हुई।

(१४) एक व्यापारी ने एक दुकानदार को 30 प्रतिशत लाभ से सा[मान]
बेचे, परन्तु दुकानदार का दिवाला निकल गया और उसने
रुपये में 11 आने का भुगतान किया। बताओ व्यापारी को
कितने प्रतिशत लाभ या हानि हुई।

(१५) एक कुंजड़ा 3 आने के 20 के भाव से कुछ आम मोल लेता है
और उतने ही आम 3 आने के 30 के भाव से मोल लेता है।
वह उनको मिला कर 3 आने के 25 के भाव से बेच देता है।
उसका लाभ या हानि प्रतिशत बताओ।

(१६) एक व्यापारी ने दो घोड़े सौ सौ रुपये में बेचे। उनमें से एक
पर तो 25 प्रतिशत लाभ हुआ और दूसरे पर 25 प्रतिशत
हानि। बताओ उसे कितने प्रतिशत लाभ या हानि हुई।
[संकेत—लाभ या हानि क्रयमूल्य पर ही होती है, विक्रयमूल्य
पर नहीं]

(१७) एक मनुष्य एक वस्तु को 20 प्रतिशत लाभ से बेचता है। यदि
वह इस को 20 प्रतिशत कम में मोल लेता और [illegible]
शिलिंग कम में बेचता तो उसे 25 प्रतिशत लाभ होता। उस
वस्तु का क्रयमूल्य बताओ।

(१८) एक वस्तु 5 प्रतिशत लाभ से बेची गयी। यदि वह वस्तु 5
प्रतिशत कम में मोल ली जाती और [illegible] शिलिंग कम में बेची

जाती, तो 10 प्रतिशत लाभ होता। उस वस्तु का क्रयमूल्य बताओ।

(१९) एक मनुष्य ने कुछ रुपये लेकर व्यापार आरम्भ किया; पहले व्यापार में मूलधन का $\frac{1}{7}$ भाग घाटा देकर फिर शेष रुपये से दूसरा व्यापार किया और उसमें उसने 10 रु० सैकड़ा लाभ उठाया, तीसरी बार एक और व्यापार किया और उसमें पूँजी के $\frac{9}{11}$ भाग की हानि हुई, परन्तु चौथी बार जो व्यापार किया उसमें उसे $66\frac{2}{3}$ रुपये प्रति सैकड़ा लाभ हुआ और उस समय उसके पास 10,000 रु० थे। बताओ उसने कितने रुपये लेकर व्यापार आरम्भ किया था?

(२०) एक घोड़ा 40 पौंड को मोल लिया और 8 मास की उधार पर 45 पौंड में बेच दिया। यदि ब्याज की वार्षिक दर 6 पौंड प्रति सैकड़ा हो तो प्रति सैकड़ा क्या लाभ हुआ?

(२१) एक क्रिकेट के खेल में एक ठेकेदार ने एक नियत मोल पर $12\frac{1}{2}$ प्रतिशत लाभ उठाने के आशय से 24 मनुष्यों के भोजन का ठेका लिया। 3 मनुष्य अनुपस्थित रहे, शेष 21 मनुष्यों से नियत मोल प्राप्त हुआ और ठेकेदार को 2 रु० की हानि रही, बताओ उसने प्रत्येक मनुष्य के भोजन का क्या मोल नियत किया था।

(२२) एक पन्सारी 4 रुपये मन वाले 20 मन चावलों में 3 रु० 8 आने मन वाले कुछ चावल मिलाता है और मिश्रण को 3 रु० 12 आने मन बेचने से 10 रुपये लाभ उठाता है। बताओ उसने कितने चावल मिलाए और अपनी पूँजी पर प्रति सैकड़ा क्या लाभ उठाया?

(२३) एक मनुष्य 5 शि० प्रति गैलन की दर से मदिरा मोल लेता है और उसमें पानी मिलाकर मिश्रण को 4 शि० प्रति गैलन के भाव से बेच कर $12\frac{1}{2}$ प्रति सैकड़ा लाभ उठाता है, तो प्रति गैलन में पानी की मात्रा बताओ?

बारहवाँ अध्याय

साधारण ब्याज

(१) जो व्यक्ति रुपया उधार लेता है और उसको कुछ समय तक अपने काम में लाता है, वह अपने धनी को नियत समय के बीतने पर उस रुपये से काम लेने के बदले में कुछ रुपये देता है। इसका नाम ब्याज है।

(२) ब्याज की दर साधारणतः हर सौ रुपये पर एक वर्ष के लिये ठहराई जाती है इसे वार्षिक प्रतिशत दर कहते हैं। इस वार्षिक प्रतिशत दर से सारे रुपयों का ब्याज फैला लेते हैं। जैसे यदि वार्षिक प्रतिशत दर 6 रुपये हो तो

$\because$ 100 रुपये का ब्याज एक वर्ष के लिए = 6 रुपये

$\therefore$ 200 रुपये का ब्याज एक वर्ष के लिए = 12 रुपये

और 50 रुपये का ब्याज एक वर्ष के लिए = 3 रुपये

और 25 रुपये का ब्याज एक वर्ष के लिए = $1\frac{1}{2}$ रुपये

इत्यादि।

(३) जिस राशि पर ब्याज लगाया जाता है उसे मूलधन कहते हैं।

(४) मूलधन में ब्याज जोड़ देने से जो राशि बनती है उसे मिश्रधन कहते हैं।

भारतवर्ष में प्रायः ब्याज प्रतिवर्ष प्रतिशत अथवा प्रतिमास प्रतिरुपये की दर से लगाया जाता है। इन प्रश्नों की क्रिया को देख कर यह बात स्पष्ट हो जायेगी।

उदाहरण (१) 625 रुपये का ब्याज 3 वर्ष के लिये 4 प्रतिशत प्रतिवर्ष की दर से निकालो।

100 रुपये का ब्याज एक वर्ष के लिए } $= 4$ रुपये

एक रुपये का ब्याज एक वर्ष के लिए } $= 4 \div 100$ रुपये

625 रुपये का ब्याज एक वर्ष के लिए } $= 4 \div 100 \times 625$ रुपये

625 रुपये का ब्याज 3 वर्ष के लिए } $= 4 \div 100 \times 625 \times 3$ रुपये

$= 625 \times 4 \times 3 \div 100$ रुपये

$= 75$ रुपये उत्तर

(५) ऊपर की क्रिया को देखने से हमको ब्याज निकालने का यह नियम प्राप्त होता है:—

नियम –किसी राशि का ब्याज, किसी विशेष प्रतिशत दर से, किसी विशेष अवधि के लिए

$$= \frac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{अवधि}}{100}$$

(६) यदि मिश्रधन प्रतीत करना हो तो मूलधन में ब्याज जोड़ दो।

जैसे ऊपर के उदाहरण में

मिश्रधन $= 625$ रुपये $+ 75$

$= 700$ रुपये

यदि केवल मिश्रधन प्रतीत करना हो, तो क्रिया इस प्रकार करो:—

100 रुपये का मिश्रधन तीन वर्ष में $= 112$ रुपये

∴ 1 रुपये का मिश्रधन तीन वर्ष में $= 112 \div 100$ रुपये

अतः 625 रुपये का मिश्रधन तीन वर्ष में $= 625 \times 112 \div 100$

$= 700$ रुपये उत्तर

उदाहरण (२) 256 रुपये का $3\frac{3}{4}$ वर्ष का ब्याज $3\frac{1}{3}$ प्रतिशत
ति वर्ष की दर से प्रतीत करो।

$$\text{ब्याज} = \frac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{अवधि}}{100}$$

मूलधन $= 256$ रुपये
दर $= 3\frac{1}{3} = \frac{10}{3}$
अवधि $= 3\frac{3}{4}$ वर्ष $= \frac{15}{4}$ वर्ष

$$\text{ब्याज} = \frac{256 \times \frac{10}{3} \times \frac{15}{4}}{100}$$

32 64 5

$$= \frac{256 \times 10 \times 15}{100 \times 3 \times 4} = 32 \text{ रुपये उत्तर}$$

10
2

उदाहरण (३) 292 रुपये का 50 दिन का ब्याज 5 प्रतिशत
तिवर्ष की दर से प्रतीत करो।

$$\text{इष्ट ब्याज} = \frac{292 \times 5 \times 50}{100 \times 365}$$

$$= \frac{73 \times 4 \times 5 \times 50}{4 \times 25 \times 73 \times 5}$$

$= 2$ रुपये उत्तर

नोट—यदि अवधि दिनों में दी गई हो तो वर्ष के 365 दिन
न कर दिनों को वर्षों के भिन्न में बदल लो। यदि अवधि महीनों
र दिनों में दी हुई हो तो महीने के 30 दिन और वर्ष के 12 महीने
नकर प्रश्न हल करो।

उदाहरण (४) 3265 रुपये 10 मास का ब्याज 5 मास 10
न के लिए 4 प्रतिशत प्रति वर्ष की दर से प्रतीत करो।

3265 रुपये 10 आने $=\frac{26125}{8}$ रुपये

5 मास 10 दिन $=5\frac{10}{30}$ मास $=\frac{16}{3\times12}$ वर्ष

∴ ब्याज $=\frac{26125}{8}\times4\times\frac{16}{12\times3}\times\frac{1}{100}$ रुपये

$=\frac{1045\times25}{8}\times4\times\frac{2\times8}{2\times6\times3}\times\frac{1}{5\times4\times5}$ रुपये

$=58$ रुपये $10\frac{2}{3}$ पाई उत्तर

उदाहरण (2) यदि ब्याज की मासिक दर 2 पैसे प्रति रुपया हो तो 49 रुपये का 5 मास का ब्याज मालूम करो।

एक रुपये का ब्याज एक मास का $\Big\}=\frac{1}{32}$ रुपये

49 रुपये का ब्याज एक मास का $\Big\}=49\times\frac{1}{32}$

49 रुपये का ब्याज 5 मास का $\Big\}=49\times\frac{1}{32}\times5$ रुपये

$=7$ रुपये 10 आने 6 पाई उत्तर

उदाहरण (3) 1026 रुपये 10 आने 8 पाई का मिश्रधन एक वर्ष 4 मास का 2 पैसे प्रति रुपया मासिक दर से मालूम करो।

मूलधन का ब्याज = मूलधन × दर × काल

$=1026\frac{2}{3}\times16\times\frac{1}{32}$

= [illegible] रुपये

= 513 रुपये 5 आने 4 पाई

ब्याज = [illegible] रुपये [illegible] आने 4 पाई

मिश्रधन = [illegible] रुपये [illegible]

$\therefore$ इष्ट मिश्रधन $= 1540$ रुपये उत्तर

या इस प्रकार

$\because$ एक रुपये का मिश्रधन 16 महीने के लिए 2 पैसे मासिक दर से $= (1 + \frac{1}{2})$ रुपये

$= \frac{3}{2}$ रुपये

$\therefore$ $1026\frac{2}{3}$ रु० का मिश्रधन 16 महीने के लिये 2 पैसे मासिक दर से $= \frac{3080}{3} \times \frac{3}{2}$ रुपये

$= \frac{3080}{2}$ रुपये

$= 1540$ रुपये उत्तर

उदाहरण—(०) 26 रुपये 8 आने $8\frac{8}{11}$ पाई का ब्याज 5 प्रतिशत प्रतिवर्ष की दर से 1 मार्च से 1 दिसम्बर तक प्रतीत करो।

26 रुपये 8 आने $8\frac{8}{11}$ पाई $= \frac{292}{11}$ रुपये

275 दिन $= \frac{275}{365}$ वर्ष

$= \frac{55}{73}$

$\therefore$ ब्याज $= \frac{292}{11} \times 5 \times \frac{55}{73} \times \frac{1}{100}$ रुपये

$= \frac{73 \times 4}{11} \times 5 \times \frac{55}{73} \times \frac{1}{100}$ रुपये

$= 1$ रुपया उत्तर

माह	दिन
मार्च	30
अप्रैल	30
मई	31
जून	30
जुलाई	31
अगस्त	31
सितम्बर	30
अक्तूबर	31
नवम्बर	30
दिसम्बर	1
दिन	275

नोट—यदि ब्याज किसी विशेष तारीख से किसी और तारीख तक निकालना हो, तो पहले दिन या अन्तिम दिन में से केवल एक दिन ही का ब्याज लगाना चाहिए।

प्रश्नावली ३५

ब्याज निकालो—

(१) 670 रुपये का 4 वर्ष का 5 प्रतिशत दर से।

(२) 682 रुपये का 5 वर्ष का 5 प्रतिशत दर से।

(३) 216 रुपये का $6\frac{1}{4}$ वर्ष का 4 प्रतिशत दर से।

(४) 8800 रुपये का $4\frac{1}{2}$ वर्ष का $3\frac{1}{4}$ रुपये प्रतिशत वार्षिक दर से।

(५) 21606 रुपये 4 आने का एक वर्ष 73 दिन का 5 प्रतिशत वार्षिक दर से।

(६) 1833 रुपये 5 आने 4 पाई का एक वर्ष 292 दिन का $4\frac{1}{2}$ प्रतिशत प्रति वर्ष दर से।

(७) 9307 रुपये 8 आने का 200 दिन का 7 प्रतिशत वार्षिक दर से।

(८) 10666 रुपये 10 आने 8 पाई का 4 मास 15 दिन का $2\frac{1}{2}$ पैसे प्रति रुपया प्रति मास की दर से।

(९) 1708 रुपये 10 आने 8 पाई का 6 मास 12 दिन का ब्याज 2 रुपये 4 आने सैकड़ा मासिक दर से बताओ।

(१०) 2666 रुपये 10 आने 8 पाई का 4 मास 8 दिन का ब्याज 1 रुपया 5 आने 4 पाई प्रतिशत मासिक दर से निकालो।

(११) 373 रुपये 5 आने 4 पाई 6 वर्ष 5 मास 15 दिन का ब्याज 1 रुपया 10 आने 8 पाई प्रतिशत मासिक दर से बताओ।

(१२) 8176 रुपये 14 आने का मिश्रधन 15 आने सैकड़ा मासिक दर से 2 वर्ष 2 मास में क्या होगा?

निम्नलिखित प्रश्नों में दर व मात्रा दी हुई है, ब्याज निकालो —

(१३) मूलधन 1122 रुपये 10 आने 8 पाई, दर एक आना 2 पैसे प्रतिशत, अवधि 4 वर्ष 5 मास 10 दिन।

अतः 140 रुपये का 9 महीने का ब्याज } = 140×9 रुपये का एक महीने का ब्याज

= 1260 रुपये का एक महीने का ब्याज

किन्तु 100 रुपये का ब्याज एक मास का } = 1 रुपया 4 आने

∴ 1200 रुपये का ब्याज = 15 रुपये 0 आने

और 50 रुपये का ब्याज = 0 रुपये 10 आने

और 10 रुपये का ब्याज = 0 रुपये 2 आने

अतः 1260 रुपये का ब्याज = 15 रुपये 12 आने

या 140 रुपये का 9 मास का ब्याज } = 15 रुपये 12 आने

उत्तर

महाजनी रीति में 140 ×9 को पक्के अंक कहते हैं और 1 रुपया 4 आने को 100 पक्के अंकों का ब्याज।

फिर 140 × 9 पक्के अंकों का ब्याज 100 पक्के अंकों के ब्याज की सहायता से फैला लेते हैं। क्रिया इस प्रकार होती है :—

140 रुपये के 9 मास के पक्के अंक = 140 ×9
= 1260

100 पक्के अंक का ब्याज = 1 रुपया 4 आने

1200 पक्के अंक का ब्याज = 15 रुपये 0 आने

50 पक्के अंक का ब्याज = 0 रुपया 10 आने

10 पक्के अंक का ब्याज = 0 रुपया 2 आने

∴ इष्ट ब्याज = 15 रुपये 12 आने

उत्तर

अतः महाजनी रीति से ब्याज निकालने का यह नियम प्राप्त हुआ —

नियम:—जब किसी राशि का ब्याज कुछ महीनों का निकालना हो और ब्याज की दर सैकड़ा प्रतिमास दी हुई हो, तो मूलधन को महीनों की संख्या से गुणा करो। जो गुणनफल प्राप्त हो उसे पक्के अंक समझो और दर प्रतिशत को 100 पक्के अंकों का ब्याज मान कर सारे पक्के अंकों का ब्याज निकाल लो।

(२) ऊपर के उदाहरण में ब्याज की दर प्रतिशत मासिक दी हुई है। इस में दर (1 रुपया 4 आने) 100 पक्के अंकों का ब्याज है। किन्तु यदि ब्याज की दर प्रति रुपया मासिक हो, तो दर एक पक्के अंक का ब्याज होगी।

उदाहरण (२) 30 रुपये का ब्याज 2 पैसे प्रति रुपया मासिक दर से 5 मास का प्रतीत करो।

30 रुपये के 5 मास में पक्के अंक $= 30 \times 5$

$= 150$

एक पक्के अंक का ब्याज $= 2$ पैसे

150 पक्के अंकों का ब्याज $= 150 \times 2$ पैसे

$= 4$ रुपये 11 आने उत्तर

(३) जब अवधि दिनों में दी हुई हो तो मूलधन को दिनों की संख्या से गुणा करते हैं और गुणनफल को कच्चे अंक कहते हैं। कच्चे अंकों को 30 पर भाग देकर पक्के अंक बनाये जाते हैं।

उदाहरण (३) 750 रुपये का 18 दिन का ब्याज 12½ आने सैकड़ा मासिक दर से निकालो।

क्रिया—750 रुपये के 18 दिन के कच्चे अंक $= 750 \times 18$

$= 13500$

13500 कच्चे अंकों के पक्के अंक $= 13500 \div 30$

$= 450$

100 पक्के अंकों का ब्याज $= 12$ आने 2 पैसे

400 पक्के अंकों का ब्याज $= 3$ रुपये 2 आने 0 पैसे

50 पक्के अंकों का ब्याज $= 0$ रुपये 6 आने 1 पैसा

इष्ट ब्याज $= 3$ रुपये 8 आने 1 पैसा

उत्तर

(४) जब अवधि महीनों और दिनों में दी हुई हो, तो पहले मूलधन को महीनों की संख्या से गुणा करके पक्के अंक बना लो, इसके पश्चात् मूलधन को दिनों की संख्या से गुणा करके कच्चे अंक बनाओ और उनको 30 पर भाग देकर पक्के अंक बनाओ, फिर सारे पक्के अंकों का ब्याज निकाल लो।

उदाहरण (४) 360 रुपये का ब्याज 7 मास 10 दिन का 9 आने सैकड़ा मासिक दर से मालूम करो।

क्रिया—360 रुपये के 7 महीने के पक्के अंक $= 360 \times 7$

$= 2520$

360 रुपये के 10 दिन के कच्चे अंक $= 360 \times 10 = 3600$

3600 कच्चे अंकों के पक्के अंक $= 3600 \div 30 = 120$

$\therefore$ कुल पक्के अंकों की संख्या $= 2520 + 120 = 2640$

100 पक्के अंकों का ब्याज $= 9$ आने

2000 पक्के अंकों का ब्याज $= 11$ रुपये 4 आने

600 पक्के अंकों का ब्याज $= 3$ रुपये 6 आने

25 पक्के अंकों का ब्याज $= 0$ रुपया 2 आने 1 पैसा

$12\frac{1}{2}$ पक्के अंकों का ब्याज $= 0$ रुपया 1 आना $\frac{1}{2}$ पैसा

ब्याज निकालने की इस रीति को कटवाँ ब्याज कहते हैं।

नीचे दिये हुए उदाहरण से कटवाँ ब्याज का नियम समझ में आजायेगा।

उदाहरण—एक किसान ने किसी धनी से 11 बैसाख संवत् 2004 को 200 रुपये, एक रुपया 9 आने सैकड़ा मासिक दर से उधार लिए और 5 सावन संवत् 2004 को 120 रुपये के गेहूं अपना ऋण चुकाने के लिए दे गया। यदि वह 11 मंगसर संवत् 2004 को अपना लेखा चुकता करना चाहे, तो उसे कितने रुपये देने पड़ेंगे?

200 रुपये का जितनी अवधि का ब्याज फैलाना है, वह = 11 बैसाख संवत् 2004 से 11 मंगसर संवत् 2004 तक = 7 महीने।

120 रुपये का जितनी अवधि का ब्याज फैलाना है, वह = 5 सावन संवत् 2004 से 11 मंगसर संवत् 2004 तक = 4 महीने 6 दिन।

धनी के अंक

200 रुपये के 7 महीने के पक्के अंक $= 200 \times 7 = 1400$

किसान के अंक

120 रुपये के 6 दिन के कच्चे अंक $= 120 \times 6 = 720$

720 कच्चे अंकों के पक्के अंक $= 720 \div 30 = 24$

120 रु० के 4 महीने के पक्के अंक $= 120 \times 4 = 480$

किसान के कुल पक्के अंक $= 480 + 24 = 504$

धनी के शेष पक्के अंक $= 1400 - 504 = 896$

100 पक्के अंकों का ब्याज = 1 रुपया 9 आने

मूलधन, दर और अवधि प्रतीत करना

(१) ब्याज के प्रश्नों में चार राशियों का होना आवश्यक है, और राशियाँ यह हैं :—

मूलधन, दर, अवधि, ब्याज

इनमें से कोई सी तीन का पता हो, तो चौथी को मालूम सकते हैं। ब्याज निकालने की रीति तो तुम जानते ही हो, अब शेष तीन राशियों को मालूम करने के विधि बताते हैं।

(२) (क) दर, अवधि और ब्याज मालूम हों, तो मूलध प्रतीत करना।

(ख) दर, अवधि और मिश्रधन मालूम हों, तो मूलध प्रतीत करना।

उदाहरण (१) किस मूलधन का ब्याज $3\frac{1}{2}$ प्रतिशत प्रतिवर्ष दर से 4 वर्ष में 630 रुपये हो जायगा ?

एक वर्ष में $3\frac{1}{2}$ रुपये ब्याज हो, तो मूलधन $= 100$ रुपये

4 वर्ष में $3\frac{1}{2}$ रुपये ब्याज हो, तो मूलधन $= \frac{100}{4}$ रुपये

4 वर्ष में 1 रुपया ब्याज हो, तो मूलधन $= \frac{100}{4 \times 3\frac{1}{2}}$ रुपये

4 वर्ष में 630 रुपये ब्याज हो, तो मूलधन $= \frac{100 \times 630}{4 \times 3\frac{1}{2}}$

$= 4500$ रुपये उत्तर

देखो ऊपर की क्रिया में मूलधन मालूम करने के लिये ब्याज 100 से गुणा करके दर और अवधि के गुणनफल से भाग दिया ग है। अतः यह नियम सिद्ध हुआ

(३) (क) मूलधन, ब्याज, अवधि मालूम हो तो दर मालूम करना।

(ख) मूलधन, मिश्रधन और अवधि मालूम हो तो दर मालूम करना।

उदाहरण (१) यदि 1650 रुपये का ब्याज $2\frac{1}{2}$ वर्ष में 132 रुपये हो, तो ब्याज की दर प्रति सैंकड़ा प्रति वर्ष मालूम करो।

$\because$ 1650 रुपये का ब्याज $2\frac{1}{2}$ वर्ष में $= 132$ रुपये

$\therefore$ 1650 रुपये का ब्याज एक वर्ष में $= \frac{132}{2\frac{1}{2}}$ रुपये

$\therefore$ 1 रुपये का ब्याज एक वर्ष में $= \frac{132}{1650 \times 2\frac{1}{2}}$ रुपये

$\therefore$ 100 रुपये का ब्याज एक वर्ष में $= \frac{100 \times 132}{1650 \times 2\frac{1}{2}}$ रुपये

$= 3\frac{1}{5}$ रुपये

अतः दर प्रतिशत प्रति वर्ष $= 3\frac{1}{5}$ रुपये उत्तर

ऊपर जो क्रिया दिखाई गई है उस से स्पष्ट है कि

$$\text{दर} = \frac{\text{ब्याज} \times 100}{\text{मूलधन} \times \text{अवधि}}$$

उदाहरण (२) 225 रुपये का मिश्रधन 3 वर्ष में 258 रुपये 12 आने हो, तो दर प्रतीत करो।

$\because$ 225 रुपये का ब्याज 3 वर्ष का $= 258$ रुपये 12 आने $- 225$ रुपये

$= 33$ रुपये 12 आने

$= \frac{135}{4}$ रुपये

$\therefore$ दर $= \dfrac{\text{ब्याज} \times 100}{\text{मूलधन} \times \text{अवधि}} = \dfrac{135 \times 100}{4 \times 225 \times 3}$

$= 5$ प्रतिशत वार्षिक उत्तर

उदाहरण (२) किस दर से कोई राशि 20 वर्ष में दुगनी हो जायेगी ?

$\because$ 100 रुपये का ब्याज 20 वर्ष में $= 100$ रुपये

$\therefore$ 100 रुपये का ब्याज 1 वर्ष में $= \dfrac{100}{20}$ रुपये

$= 5$ रुपये

अतः ब्याज की दर $= 5$ प्रतिशत प्रतिवर्ष उत्तर

या इसे इस प्रकार हल करेंगे :

$\because$ दर $= \dfrac{\text{ब्याज} \times 100}{\text{मूलधन} \times \text{अवधि}}$

$\therefore$ दर $= \dfrac{100 \times 100}{100 \times 20}$

$= 5$ प्रतिशत प्रतिवर्ष उत्तर

प्रश्नावली ३९

(१) किस प्रतिशत दर से 250 रुपये पर $3\frac{1}{2}$ वर्ष में 39 रुपये 6 आने ब्याज हो जायेगा ?

(२) किस प्रतिशत दर से 715 रुपये पर $4\frac{1}{2}$ वर्ष में 80 रुपये 7 आने ब्याज हो जायेगा ?

(३) किस प्रतिशत दर से 7000 रुपये पर 2 वर्ष 73 दिन में 616 रुपये ब्याज हो जायेगा ?

(४) किस प्रतिशत दर से [illegible] रुपये पर पहली मई से 24 जुलाई तक [illegible] रुपये ब्याज हो जायेगा ?

(५) किस प्रतिशत दर से एक रुपया 4 आने पर एक महीने में 6 पाई ब्याज हो जायेगा ?

(६) किस दर से 4615 रुपये 13 वर्ष में 6114 रुपये 14 आने हो जायेंगे ?

(७) किस प्रतिशत दर से 9258 रुपये 5 आने 4 पाई का मिश्रधन $3\frac{1}{2}$ वर्ष में 11526 रुपये 10 आने हो जायेगा ?

(८) किस दर से 391 रुपये 10 आने 8 पाई 3 वर्ष में 430 रुपये 13 आने 4 पाई हो जायेंगे ?

(९) किस दर से 2 आने 4 पाई $33\frac{1}{3}$ वर्ष में 1 रुपया 14 आने 4 पाई हो जायेंगे ?

(१०) किस प्रतिशत दर से कोई राशि 25 वर्ष में दुगनी हो जायेगी

(११) किस दर से 3000 रुपये का ब्याज 12 जून से 5 अक्टूबर तक 54 रुपये हो जायेगा ?

(१२) किस दर प्रतिशत से $3\frac{1}{2}$ वर्ष में किसी राशि का ब्याज मूलधन का .16625 हो जायेगा ?

(४) (क) मूलधन, ब्याज और दर दी हुई हो, तो अवधि प्रतीत करना।

(ख) मूलधन, मिश्रधन और दर दी हुई हो, तो अवधि प्रतीत करना।

उदाहरण (१) कितने समय में 9700 रुपये का ब्याज 4 प्रतिशत वार्षिक दर से 2037 रुपये हो जायेगा ?

100 रुपये पर 4 रुपये ब्याज हो तो समय = 1 वर्ष

या इस प्रकार

$$\text{अवधि} = \frac{\text{ब्याज} \times 100}{\text{मूलधन} \times \text{दर}}$$

$$= \frac{1640\frac{5}{8} \times 100}{37500 \times 1\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{13125 \times 100 \times 4}{8 \times 37500 \times 7}$$

$= 2\frac{1}{2}$ वर्ष उत्तर

उदाहरण (३) एक राशि का मिश्रधन साधारण ब्याज दर से 3 वर्ष में 414 रुपये 6 आने, और 5 वर्ष में 440 रु० 10 आने हो जाता है। मूलधन और ब्याज की दर प्रतीत करो।

मिश्रधन = मूलधन + ब्याज

अतः मूलधन + 3 वर्ष का ब्याज = 414 रुपये 6 आने

और मूलधन + 5 वर्ष का ब्याज = 440 रुपये 10 आने

अतः 2 वर्ष का ब्याज = (440 रुपये 10 आने−414 रुपये 6 आने)

= 26 रुपये 4 आने

एक वर्ष का ब्याज = 13 रुपये 2 आने

और 3 वर्ष का ब्याज = 39 रु० 6 आने

∴ मूलधन = 414 रुपये 6 आने−39 रुपये 6 आने

= 375 रुपये

अतः ब्याज = 26 रु० 4 आने = $\frac{105}{4}$

अवधि = 2 वर्ष

दर = $\frac{[illegible] \times 100}{4 \times 2 \times 375}$

(१०) एक मनुष्य एक लाख रुपये 4 प्रतिशत वार्षिक द
उधार लेता है और हर वर्ष 8000 रुपया दे देता
बताओ 3 वर्ष के पश्चात् उसे कितना ऋण देना
रहेगा।

(११) एक राशि का मिश्रधन 550 पौंड होता है जब कि ब्याज
दर 4 प्रतिशत है और समय 2 वर्ष 6 महीने है। यदि दर
प्रतिशत हो और समय 3 वर्ष 6 महीने हो तो उस र
का मिश्रधन कितना होगा?

(१२) यदि 4 वर्ष में 2520 रुपये का मिश्रधन 3024 रुपये हो
है, तो कितने समय में उसी दर से 520 रुपये का मि
611 रुपये होगा?

(१३) किसी राशि का मिश्रधन साधारण ब्याज से 3 वर्ष में 3
रुपये 8 आने और $7\frac{1}{2}$ वर्ष में 453 रुपये 12 आने हो ज
है, तो मूलधन और ब्याज की दर बताओ।

(१४) वह राशि ज्ञात करो जिसका ब्याज $3\frac{1}{2}$ प्रतिशत दर
3 वर्ष 4 महीने में उतना ही हो, जितना कि 160 पौंड
$2\frac{1}{2}$ प्रतिशत दर से 2 वर्ष 6 महीने में होता है।

(१५) मैंने 500 रुपये उधार लिए और 9 महीने पश्चात् 15
रुपये और उधार लिए, परन्तु इस बार ब्याज की वार्षिक द
पहले से $2\frac{1}{2}$ प्रतिशत अधिक थी। दूसरा ऋण लेने के 2
पश्चात् मुझे 2225 रुपये 2 आने देने पड़े। ब्याज की पहली
दर बताओ।

(१६) एक मनुष्य के पास 1200 पौंड थे। इनमें से उसने कुछ को
5 वर्ष के लिए 4 प्रतिशत वार्षिक दर से ब्याज पर लगाया
और शेष धन को 4 वर्ष के लिये 5 प्रतिशत वार्षिक द
पर लगाया। यदि प्रत्येक धन का ब्याज बराबर हो, तो बताओ
उसने 4 प्रतिशत पर कितना धन लगाया था?

रुपया नहीं देगा वह हुण्डी पर लिखे धन (6000 रुपये) में से यह बट्टा काट लेगा। यह बट्टा उतना ही होगा जितना इस हुण्डी के रुपये पर शेष समय का ब्याज बनता है। यह बट्टा काट कर वह शेष रुपया भाला पुरुषोत्तम को दे देगा। जो बट्टा इस प्रकार काटा जाता है उसे व्यावहारिक बट्टा कहते हैं।

व्यावहारिक बट्टा = हुण्डी के धन का साधारण ब्याज।

यदि पहले से यह पता हो कि हुण्डी का रुपया किस तिथि अथवा तारीख को भरना है, तो इसमें 3 दिन और मिला दिए जायेंगे। यदि कोई निश्चित तिथि न लिखी हो, केवल अवधि लिखी हो, तो तीन दिन नहीं जोड़े जाते।

व्यावहारिक बट्टा निकालने की विधि

उदाहरण (१) 750 रुपये की हुंडी 28 जनवरी 1948 को छः मास की अवधि पर लिखी गई। इसका रुपया 7 मार्च को 3 प्रतिशत वार्षिक दर से बट्टा देकर बैंक से लिया गया। बताओ कितना व्यावहारिक बट्टा देना पड़ा ?

यह हुण्डी 28 जनवरी को लिखी गई है, अतः इसे भरने की तारीख 28 जुलाई होगी। किन्तु इसमें तीन दिन की अवधि और जोड़नी होगी इसलिए इसे भरने की ठीक तारीख 31 जुलाई है।

व्यावहारिक बट्टा = हुण्डी के धन का साधारण ब्याज

$$\therefore \text{बट्टा} = \frac{750 \times 3}{100} \times \frac{146}{365}$$

$= 9$ रुपये उत्तर

मार्च	= 24 दिन
अप्रैल	= 30 दिन
मई	= 31 दिन
जून	= 30 दिन
जुलाई	= 31 दिन
	146 दिन

उदाहरण (२) बताओ, 524 पौंड की हुण्डी के कितने पौं[illegible]
बैंक से मिलेंगे जबकि हुण्डी का रुपया 8 मास में मिलता हो औ[illegible]
ब्याज की दर 4 प्रतिशत हो ? अपना उत्तर निकटतम पैंस त[illegible]
निकालो।

$$\text{व्यावहारिक बट्टा} = \frac{524 \times 8 \times 4}{100 \times 12} \text{ पौंड}$$

$$= \frac{1048}{75} \text{ पौंड}$$

$$= 13 \text{ पौंड } 19 \text{ शिलिंग } 6 \text{ पेंस (लगभग)}$$

अतः बैंक इस हुण्डी के (524 पौंड—13 पौंड 19 शिलिंग 6 पैंस)

या 510 पौंड 6 पैंस देगा उत्तर

उदाहरण (३) यदि किसी हुण्डी का व्यावहारिक बट्टा 3 प्रतिशत की दर से 7 रुपये 8 आने हो और उस हुण्डी का रुपया 2 मास में मिलना हो, तो बताओ यह हुण्डी कितने रुपये की है ?

कल्पना करो कि हुण्डी 100 रुपये की है।

100 रुपये का व्यावहारिक बट्टा $= \frac{100}{100} \times 3 \times \frac{2}{12} = \frac{1}{2}$ रुपया

यदि व्यावहारिक बट्टा $\frac{1}{2}$ रुपया हो, तो हुण्डी 100 रुपये की है

" " " 1 " " " 200

" " " $7\frac{1}{2}$ " " " $200 \times 7\frac{1}{2}$ "

अतः वह हुण्डी 1500 रुपये की है। उत्तर

प्रश्नावली ४१

१. [illegible] रुपये की एक हुण्डी 7 फरवरी को 9 महीने की अवधि पर लिखी गई और 13 जुलाई को भुनाई गई। यदि ब्याज की दर [illegible] रुपये सैंकड़ा प्रति वर्ष हो तो व्यावहारिक बट्टा बताओ।

(२) $2\frac{1}{2}\%$ की दर से 6 मास पश्चात् देय 517 पौंड 10 शिलिंग की हुण्डी का व्यावहारिक बट्टा प्रतीत करो, जो 9 जुलाई को लिखी गई तथा 14 अगस्त को भुनाई गई।

(३) 1825 पौंड की हुण्डी 15 सितम्बर को 3 महीने की अवधि पर लिखी गई और 12 अक्टूबर को भुनाई गई। $4\frac{1}{2}\%$ की दर से उसका व्यावहारिक बट्टा प्रतीत करो।

(४) 7512 रुपये 8 आने की हुण्डी 11 मई को 7 महीने की अवधि पर लिखी गई और 21 जुलाई को $3\frac{1}{2}\%$ की दर से भुनाई गई। व्यावहारिक बट्टा बताओ।

(५) $4\frac{1}{2}\%$ की दर से 2500 रुपये की हुण्डी का व्यावहारिक बट्टा प्रतीत करो जो 22 अगस्त को 6 महीने की अवधि पर लिखी गई थी और 2 अक्टूबर को भुनाई गई थी।

(६) 2550 रुपये की हुण्डी 6 अगस्त को 12 महीने की अवधि पर लिखी गई और 2 जनवरी को भुनाई गई। 5% की दर से व्यावहारिक बट्टा प्रतीत करो।

(७) [illegible] की दर से 21200 रुपये की हुण्डी का व्यावहारिक बट्टा प्रतीत करो जो 1 फरवरी को 10 महीने की अवधि पर लिखी गई थी और 13 सितम्बर को भुनाई गई थी।

(८) 1250 पौंड की हुण्डी 11 नवम्बर को 6 महीने की अवधि पर लिखी गई और 1 मार्च को भुनाई गई। 4% की दर से इस का व्यावहारिक बट्टा क्या हुआ?

(९) 752 रुपये की एक हुण्डी [illegible] पश्चात् देय है। 5% की दर से [illegible] व्यावहारिक बट्टा काट कर इस हुण्डी के कितने रुपये मिल सकते हैं?

(१०) [illegible] की हुण्डी [illegible] अक्टूबर को देय [illegible] हुण्डी [illegible] अक्टूबर को देय थी। [illegible]

में करें। तो बताओ, 3 मनुष्य और 9 लड़के उसी काम को कितनी देर में करेंगे ?

∵ 12 मनुष्य और 7 लड़के सारा काम 9 दिन में करते हैं

∴ 12 मनुष्य और 7 लड़कों का एक दिन का काम $= \frac{1}{9}$

∵ 24 मनुष्यों और 14 लड़कों का एक दिन का काम

$$= \frac{2}{9} \ldots (a)$$

8 मनुष्य और 13 लड़के सारा काम 11 दिन में करते हैं।

∴ 8 मनुष्य और 13 लड़कों का एक दिन का काम $= \frac{1}{11}$

अथवा 24 मनुष्य और 39 लड़कों का एक दिन का काम $= \frac{3}{11} (b)$

परिणाम (a) को परिणाम (b) में से घटाने पर 25 लड़कों का

$$\text{एक दिन का काम} = \frac{3}{11} - \frac{2}{9} = \frac{5}{99}$$

∵ एक लड़के का एक दिन का काम $= \frac{5}{99 \times 25} = \frac{1}{495} (c)$

∴ 14 लड़कों का एक दिन का काम $= \frac{14}{495}$

अतः (a) के अनुसार 24 मनुष्यों का एक

$$\text{दिन का काम} = \frac{2}{9} - \frac{14}{495} = \frac{96}{495}$$

एक मनुष्य का एक दिन का काम $= \frac{4}{495}$ (d)

अब और के अनुसार

अथवा बीजगणित द्वारा

मान लो ग कुल काम को x दिन में कर सकता है, तो

ग का एक दिन का काम $= \frac{1}{x}$

ख " " " $= \frac{1}{16} - \frac{1}{x}$

क " " " $= \frac{1}{12} - \left[\frac{1}{16} - \frac{1}{x}\right]$

अब प्रश्न में दी हुई शर्तें के अनुसार

$5\left[\frac{1}{12} - \frac{1}{16} + \frac{1}{x}\right] + 7\left[\frac{1}{16} - \frac{1}{x}\right] + \frac{13}{x} = 1$

या $\frac{5}{12} - \frac{5}{16} + \frac{5}{x} + \frac{7}{16} - \frac{7}{x} + \frac{13}{x} = 1$

या $\frac{11}{x} + \frac{13}{24} = 1$

या $\frac{11}{x} = \frac{11}{24} \qquad x = 24$

उदाहरण (७) क और ग मिलकर एक काम को जितने समय में करते हैं ख उस काम को उससे तिगुने समय में कर सकता है। क और ख मिलकर उसी काम को जितने समय में करते हैं ग उससे दुगुने समय में करता है, तीनों मिलकर इस काम को 10 दिन में कर लेते हैं। बताओ वे अकेले अकेले इस काम को कितने दिन में कर सकते हैं?

क और ग का काम = 3 (ख का काम)

दोनों पक्षों में ख का काम जोड़ने से

क, ख और ग का काम = 4 (ख का काम)

$\therefore$ ख इस काम को 45 दिन में समाप्त कर सकता है

क का एक दिन का काम $= \frac{1}{20} - \frac{1}{45} = \frac{5}{180}$

$\therefore$ क इसे $\frac{180}{5}$ अर्थात् 36 दिन में समाप्त करेगा।

क इस काम को 36 दिन में और ख 45 दिन में समाप्त करेगा।

उत्तर

उदाहरण (६) एक ठेकेदार ने एक काम 80 दिन में करने का ठेका लिया और 60 मज़दूर काम पर लगाये। 20 दिन में ¼ काम समाप्त हुआ। बताओ, अब वह और कितने मज़दूर काम पर लगाये कि काम नियत समय पर समाप्त हो जाय।

क्रिया:– 20 दिन में ¼ काम ही समाप्त हो सका, शेष 60 दिनों में ¾ काम और करना है।

¼ काम 20 दिन में हो तो मज़दूरों की संख्या = 60

1 ,, 20 ,, ,, ,, $= 60 \times 4$

,, ,, 60 ,, ,, ,, $= \frac{60 \times 4}{3} = 80$

$\therefore$ ठेकेदार 80 − 60 = 20 मज़दूर और, काम पर लगावे तो [illegible]म समय पर समाप्त हो जायगा।

20 मनुष्य उत्तर

प्रश्नावली [illegible]

1 [illegible] मनुष्य [illegible] काम को [illegible] दिन [illegible] [illegible] 15 मनुष्य [illegible] दिन में कर सकते हैं?

2 [illegible] काम को [illegible] मनुष्य [illegible] दिन में कर सकते हैं। बताओ, कितने मनुष्य और [illegible] काम [illegible] दिन में समाप्त [illegible]?

(३) एक दीवार को 15 मनुष्य 12 दिन में बना सकते थे। यदि वह दीवार 20 दिन में बनी हो, तो बताओ कितने मनुष्य काम पर नहीं आते थे ?

(४) क 6 दिन में उतना काम करता है जितना ख 7 दिन में; और ख 3 दिन में उतना काम करता है जितना ग 4 दिन में। बताओ क उस काम को अकेला कितने दिन में कर लेगा जिसे क, ख और ग मिलकर 4 दिन में पूरा कर लेते हैं ?

(५) एक काम के करने में क की शक्ति उतनी ही है जितनी ख और ग की मिलकर। यदि क और ख मिलकर इसे 9 घण्टे 36 मिनिट में और ग अकेला 48 घण्टे में कर ले, तो बताओ, ख अकेला इसे कितने समय में कर लेगा ?

(६) क और ख एक काम को 24 दिन में, ख और ग 40 दिन में और ग और क 30 दिन में कर सकते हैं। बताओ, प्रत्येक अलग-अलग इस काम को कितने दिन में समाप्त कर लेगा ?

(७) क एक काम को 15 दिन में कर सकता है। क और ख मिल कर उस काम को 10 दिन में कर सकते हैं। बताओ ख अकेला सारे काम का [illegible] भाग कितने समय में कर लेगा ?

(८) क, ख, ग मिलकर एक काम को 8 दिन में कर सकते हैं, क और ख उसी काम को 10 दिन में और ख और ग 12 दिन में कर सकते हैं। बताओ क और ग उसी काम को कितने दिनों में करेंगे ?

(९) क और ख एक काम को 8 दिन में, ख और ग 20 दिन में और ग और क 12 दिन में कर सकते हैं। बताओ, इन में से प्रत्येक अलग-अलग उसी काम को कितने दिनों में समाप्त कर सकता है ?

(१०) राम एक काम 20 दिन में कर सकता है और कृष्ण 30 दिन में। 4 दिन काम करने के पश्चात् राम चला गया, और कृष्ण और मोहन ने मिलकर शेष काम को 12 दिन में समाप्त कर लिया। बताओ मोहन अकेला उस काम को कितने दिनों में कर सकता है ?

(११) क ने एक काम का [illegible] भाग 15 दिन में समाप्त करने के पश्चात् ख की सहायता से शेष काम 6 दिन में समाप्त कर लिया। बताओ, ख अकेला उस काम को कितने दिनों में समाप्त कर सकता है ?

(१२) क एक काम को 8 दिन में कर सकता है, ख 12 दिन में; दोनों ने मिलकर काम करना प्रारम्भ किया। 4 दिन के पश्चात् क काम छोड़ कर चला गया। बताओ शेष काम ख कितने दिनों में पूरा करेगा ?

(१३) क एक काम को 12 दिन में कर सकता है और ख 15 दिन में। दोनों ने मिलकर काम करना प्रारम्भ किया। कुछ दिनों के पश्चात् ख काम छोड़ कर चला गया। शेष काम को क ने 3 दिन में समाप्त कर लिया। बताओ सारा काम कितने समय में समाप्त हुआ ?

* इस प्रश्न में [illegible] काम [illegible] किन्तु [illegible] दिन में

(२०) क और ख मिलकर एक काम को 12 दिन में कर सकते हैं। पहले क ने अकेले 4 दिन काम किया, फिर ख उसके साथ आ मिला और दोनों ने मिलकर शेष काम 9 दिन में समाप्त किया। बताओ, प्रत्येक अलग-अलग इस काम को कितने समय में कर सकता है?

(२१) क का 5 दिन का काम ख के 6 दिन और ग के 9 दिन के काम के बराबर है। क ने 12 दिन, तथा ख ने 24 दिन काम करके एक काम का आधा भाग समाप्त किया। बताओ शेष आधा काम ग कितने समय में समाप्त करेगा?

(२२) एक ठेकेदार ने एक काम को 12 दिन में समाप्त करने का ठेका लिया और 4 मनुष्य आठ दिन तक काम पर लगाने के पश्चात् प्रतीत हुआ कि काम का केवल $\frac{1}{3}$ भाग समाप्त हुआ है। बताओ वह कितने मनुष्य काम पर और लगाये कि काम समय पर समाप्त हो जाय?

(२३) क, ख, और ग मिलकर एक काम को 8 दिन में कर सकते हैं। क और ख उसी काम को 12 दिन में और ख और ग 16 दिन में। बताओ, क और ग उसी काम को कितने दिनों में कर लेंगे?

(२४) क एक काम को 6 दिन में समाप्त कर सकता है; ख 8 दिन में और ग उतने ही दिन में जितने दिन में क और ख मिलकर। बताओ, क और ग मिलकर उस काम को कितने दिन में कर लेंगे?

(२१) एक ठेकेदार ने एक काम को 100 दिन में करने का ठेका लिया और उस काम पर तुरन्त ही 30 मनुष्य लगाये। 40 दिन बीतने पर $\frac{1}{3}$ काम समाप्त हुआ। बताओ वह और कितने मनुष्य काम पर लगाये कि काम नियत समय पर समाप्त हो जाय ?

(२२) 8 मनुष्य 5 घण्टे प्रतिदिन काम करके एक काम को 12 दिन में समाप्त कर लेते हैं। बताओ, 10 मनुष्य 6 घण्टे प्रतिदिन काम करके उसे कितने दिन में समाप्त कर लेंगे।

(२३) 15 मनुष्य प्रतिदिन 12 घण्टे काम करके एक काम को 8 दिन में समाप्त कर लेते हैं। बताओ, उस काम को कितने मनुष्य 20 दिन में समाप्त करेंगे, यदि वह प्रतिदिन केवल 8 घण्टे काम करें ?

(२४) 16 मनुष्य प्रतिदिन 5 घण्टे काम करके 11 दिन में एक काम समाप्त कर लेते हैं। बताओ, 20 मनुष्य प्रतिदिन कितने घण्टे काम करें कि यह काम 4 दिन में समाप्त हो जाय।

(२५) 12 श्रमिक 6 घण्टे प्रतिदिन काम करके एक काम को 14 दिन मे समाप्त करते हैं। यदि श्रमिकों से 7 घण्टे प्रतिदिन काम कराया जाय, तो बताओ, श्रमिकों की संख्या कितनी बढ़ाई जाय कि यह काम 9 दिन में समाप्त हो जाय ?

(२६) 33 मनुष्य प्रतिदिन 6 घण्टे काम करके एक काम को 8 दिन में कर सकते थे। किन्तु उनमें से कुछ मनुष्य चले गये और शेष मनुष्यों ने 8 घण्टे प्रतिदिन काम करके उस काम को 9 दिन में पूरा कर दिया बताओ, कितने मनुष्य चले गये थे ?

स्पष्ट है कि वह 15 मील $1\frac{3}{5}$ घण्टे अर्थात 5 घण्टे में चलेगा।

अत:

$$समय = \frac{दूरी}{चाल}$$

उदाहरण (१) क एक घण्टे में $4\frac{1}{4}$ मील, और ख एक घ 3½ मील चलता है। यदि वे प्रातः काल 6 बजे एक साथ चल तो बताओ दोपहर तक क, ख से कितना आगे निकल जायेगा?

पहली रीति

प्रातःकाल 6 बजे से दोपहर तक का समय $= 6$ घण्टे

6 घण्टे में क, $6 \times 4\frac{1}{4} = 25\frac{1}{2}$ मील चलेगा।

6 घण्टे में ख $6 \times 3\frac{1}{2} = 21$ मील चलेगा

∴ दोपहर तक ख से क, $25\frac{1}{2} - 21 = 4\frac{1}{2}$ मील आगे जायगा।

दूसरी रीति

एक घण्टे में क, ख से $(4\frac{1}{4} - 3\frac{1}{2})$ या $\frac{3}{4}$ मील अधिक चलेगा

∴ छः घण्टे में क, ख से $\frac{3}{4} \times 6 = 4\frac{1}{2}$ मील आगे नि जायेगा।

उदाहरण (२) मुझे किसी स्थान पर निश्चित समय पर पहुँच है। यदि मैं $3\frac{3}{4}$ मील प्रति घण्टा चलूँ तो मैं वहाँ निश्चित समय 4 मिनिट देर से पहुँचूँगा, और यदि मैं $4\frac{1}{2}$ मील प्रति घण्टा च तो निश्चित समय से 12 मिनिट पहले पहुँच जाऊंगा, बताओ व स्थान कितनी दूर है?

कल्पना करो कि वह स्थान 1 मील की दूरी पर है।

पहली अवस्था में एक मील चलने में मुझे $\frac{4}{15}$ घण्टे या 16 मिनिट लगेंगे और दूसरी अवस्था में $\frac{2}{9}$ घण्टे या $13\frac{1}{3}$ मिनिट लगेंगे।

दूसरी अवस्था में मुझे $16-13\frac{1}{3}=2\frac{2}{3}$ मिनट समय कम लगा। या यूं कहो कि $2\frac{2}{3}$ मिनिट की बचत होती है। परन्तु प्रश्न के अनुसार 4 + 12 या 16 मिनिट बचते हैं।

अतः जब $2\frac{2}{3}$ मिनिट की बचत होती है तो वह स्थान = 1 मील दूर है।

जब 1 मिनिट की बचत होती है तो वह स्थान = $1\div 2\frac{2}{3}$ मील दूर है।

जब 16 मिनिट की बचत होती है तो वह स्थान = $(1\div 2\frac{2}{3})\times 16$ मील दूर है।

$$=\frac{1\times 3}{8}\times 16=6 \text{ मील दूर है।}$$

अतः वह स्थान 6 मील दूर है। उत्तर

या बीज गणित द्वारा—

मान लो कि वह स्थान x मील दूर है।

तो $\frac{x}{3\frac{3}{4}}-\frac{x}{4\frac{1}{2}}=\frac{16}{60}$, अथवा $\frac{4x}{15}-\frac{2x}{9}=\frac{16}{60}$

अथवा $48x-40x=48$, $8x=48$, $\therefore x=6$

३. सापेक्ष चाल।

पहली अवस्था

उदाहरण : क और ख एक दूसरे से [illegible] मील के अन्तर पर हैं। यदि क [illegible] मील प्रति घण्टा ख की ओर चले और ख [illegible] मील प्रति घण्टा क की ओर [illegible] तो कितने समय में एक दूसरे से मिल जावेंगे

क 5 मील प्रति घण्टा की चाल से ख की ओर चलता है, और ख 4 मील प्रति घण्टा की चाल से क की ओर चलता है, तो स्पष्ट है कि एक घण्टे में, क 5 मील ख की ओर आता है ख 4 मील क की ओर आता है।

अतः एक घण्टे पश्चात् उन के बीच का अन्तर $5+4=9$ मील कम हो जायगा।

इसी प्रकार दूसरे घण्टे में भी यह अन्तर 9 मील और कम हो जायेगा इत्यादि।

इस प्रकार वे प्रत्येक घण्टे के पश्चात् 9 मील समीप आ जाते हैं। अतः वे $\frac{36}{9}$ या 4 घण्टे में एक दूसरे से मिल जायेंगे। उत्तर

उदाहरण (४) क अमृतसर से लाहौर की ओर चला और उसी समय ख लाहौर से अमृतसर की ओर चल पड़ा। अमृतसर और लाहौर के बीच में 33 मील का अन्तर है। क $4\frac{3}{4}$ मील प्रति घण्टा और ख $3\frac{1}{2}$ मील प्रति घण्टा चलता है। वे एक दूसरे से कब मिलेंगे और वह स्थान लाहौर से कितनी दूर होगा?

वे प्रतिकूल दिशाओं में चल रहे हैं

उनकी गति का योगफल $=4\frac{3}{4}+3\frac{1}{2}=8\frac{1}{4}$ मील प्रति घण्टा

वे दोनों 33 मील, $\frac{33}{8\frac{1}{4}}=4$ घण्टे में चल लेंगे।

वे एक दूसरे से 4 घण्टे पश्चात् मिलेंगे

ख 4 घण्टे में $3\frac{1}{2}\times 4=14$ मील चलेगा।

वे लाहौर से 14 मील दूर, एक स्थान में मिलेंगे।

दूसरी अवस्था

उदाहरण (५) दो स्थान एक दूसरे से [illegible] मील दूर हैं। वे

प्रश्नावली ४३

(१) क और ख एक स्थान से प्रतिकूल दिशाओं में एक ही समय चले। उनकी चाल क्रमशः $3\frac{1}{2}$ मील और $3\frac{1}{4}$ प्रति घण्टा है। बताओ, वे कितने समय में एक दूसरे से 58 मील दूर हो जायेंगे?

(२) क एक घण्टे में $3\frac{1}{2}$ मील चलता है। वह ख से $2\frac{1}{2}$ घण्टे पहले चला और ख $4\frac{1}{2}$ मील प्रतिघण्टा की चाल से उसी सड़क पर उसी दिशा में चला। बताओ, वह क के पास किस समय पहुंच जायेगा?

(३) यदि कोई मनुष्य $3\frac{1}{2}$ मील प्रति घण्टा चल कर किसी स्थान पर 4 घण्टे 30 मिनिट में पहुंच जाय, तो बताओ वही मनुष्य $5\frac{1}{4}$ मील प्रति घण्टा की चाल से कितने समय में उस स्थान पर पहुंच कर लौट आयेगा।

(४) दो मनुष्यों ने अपनी साइकिलों पर एक ही समय लाहौर से क्रमशः $7\frac{1}{2}$ मील और 10 मील प्रति घण्टा की चाल से प्रस्थान किया, तो बताओ वे कितनी देर में एक दूसरे से 30 मील दूर हो जायेंगे? (क) यदि वे एक ही दिशा में चलें, (ख) यदि वे प्रतिकूल दिशाओं में चलें।

(५) एक मनुष्य मथुरा से और दूसरा आगरे से चला। एक $4\frac{1}{2}$ मील प्रति घण्टा की चाल से और दूसरा $3\frac{1}{2}$ मील प्रति घण्टा की चाल से चला। यदि वे एक समय से ½ घण्टे पश्चात् मिलें तो बताओ मथुरा से [illegible] कितना दूर है?

(६) क [illegible] घण्टा चलता है। वह ख से [illegible] घण्टे पहले चल [illegible] मील प्रति

(१२) एक विद्यार्थी घर से 9 बजे स्कूल को चला। यदि वह 3 मील प्रति घण्टा चले तो वह स्कूल के समय से 5 मिनट देर में पहुंचेगा, और यदि वह 4 मील प्रति घण्टा चले तो स्कूल के समय से 5 मिनट पहले पहुंच जावेगा। बताओ स्कूल किस समय लगता है?

(१३) क, ख और ग क्रमशः 3, 4 और 5 मील प्रति घण्टा की चाल से चलते हैं। वे पूना से क्रमशः 1, 2 और 3 बजे चले। ख जब क से जा मिला तो ख ने उसे एक संदेश देकर ग के पास पीछे भेज दिया। बताओ ग को यह संदेश किस समय मिला?

(१४) एक मनुष्य को [illegible] मील प्रति घण्टा की चाल से क स्थान से ख स्थान तक जाने और क स्थान पर वापस आने में कुछ समय लगा। यदि वह [illegible] मील प्रति घण्टा की चाल से जाता और [illegible] मील प्रति घण्टा की चाल से वापस आता, तो उसे [illegible] मिनट अधिक लगते। बताओ क स्थान ख स्थान से कितनी दूर था?

(१५) दो मनुष्य क और ख एक ही समय किसी स्थान से एक ही [illegible] [illegible] [illegible] मील प्रति घण्टा की [illegible] [illegible] [illegible] और [illegible] पश्चात् [illegible] [illegible] ख [illegible] [illegible] [illegible] रहा। बताओ, [illegible] [illegible]

१०) क और ख ने 3 मील प्रति घण्टा की चाल से एक साथ से यात्रा आरम्भ की। जब वे $\frac{1}{2}$ मील चले गये तो ख उसी चाल से उस स्थान पर लौट आया जहाँ से यात्रा आरम्भ की थी। यहाँ पहुंच कर वह $\frac{3}{4}$ घण्टे रुका रहा। इस बीच में क बराबर चलता रहा। अब ख ने फिर से यात्रा आरम्भ की और $2\frac{1}{2}$ घण्टे में क को पकड़ लिया। बताओ, दूसरी बार वह किस चाल से चला?

सोलहवां अध्याय

निष्पत्ति और अनुपात

(१) यदि मोहन के पास 5 रुपये हों और किशोरी के पास 10 रुपये तो मोहन के पास किशोरी से आधे या $\frac{1}{2}$ रुपये होंगे। या यूं कहो कि मोहन और किशोरी के रुपयों में 1 और 2 या (1 : 2 या $\frac{1}{2}$) की निष्पत्ति है।

(२) यदि दो रेखाओं की लम्बाई 4 इंच और 7 इंच हो तो पहली रेखा दूसरी रेखा का $\frac{4}{7}$ होगी। या यूं कहो कि पहली रेखा और दूसरी रेखा में 4 और 7 (4 : 7 या $\frac{4}{7}$) की निष्पत्ति है।

(३) रामप्रसाद एक दिन में 15 रुपये कमाता है और हंसराज 5 रुपये, तो रामप्रसाद की एक दिन की आय हंसराज की एक दिन की आय का $\frac{15}{5}$ या $\frac{3}{1}$ है। या यूं कहो कि उनकी आयों में 15 और 5 (15 : 5) या तीन और एक (3 : 1) की निष्पत्ति है।

(४) यदि एक राशि a हो और दूसरी b तो दोनों राशियों में $a : b$ अथवा $\frac{a}{b}$ की निष्पत्ति है।

(५) परिभाषा—दो सजातीय राशियों में एक राशि दूसरी का कौनसा भाग है अथवा एक राशि दूसरी में कितनी बार सम्मिलित है, यह जिस भिन्नात्मक अथवा पूर्ण संख्या द्वारा प्रकट किया जाता है उस केवल संख्या को पहली तथा दूसरी राशि की निष्पत्ति कहते हैं।

ध्यान रखो कि दोनों राशियों की इकाई एक ही होनी आवश्यक है। यदि तीन रुपये और 40 आने की निष्पत्ति निकालनी हो तो दोनों राशियों को सजातीय बनाना पड़ेगा, अर्थात् या तो दोनों राशियों के रुपये बनाने होंगे या आने। अब 3 रुपये = 48 आने अत. दोनों राशियों में 48 और 40 की या $\frac{48}{40}=\frac{6}{5}$ की निष्पत्ति होगी।

स्पष्ट है कि निष्पत्ति एक केवल संख्या में, यह न गज है न फुट, न रुपये न आने।

a और b की निष्पत्ति $\frac{a}{b}$ है। इनमें से a को पूर्वपद और b को परपद कहते हैं। और a और b को निष्पत्ति के पद कहते हैं।

उदाहरणतः—यदि a और b क्रमशः $7\frac{1}{2}$ रुपये और $3\frac{3}{4}$ रुपये को सूचित करते हों, तो a और b की निष्पत्ति $= 7\frac{1}{2}/3\frac{3}{4}$

$$= \frac{15}{2} \div \frac{15}{4}$$
$$= \frac{2}{1}$$

ध्यान रखने योग्य बात यह है कि परिणाम केवल 2 है, 2 रुपये नहीं।

(६) हम जानते हैं कि $\frac{ax}{bx}=\frac{a}{b}$ और $\frac{a-x}{b-x}=\frac{a}{b}$

अत. यदि किसी निष्पत्ति के दोनों पदों को एक ही राशि से गुणा किया जाय या भाग दिया जाय, तो निष्पत्ति के मूल्य में कोई अन्तर नहीं पड़ता।

(७) दो निष्पत्तियों की तुलना करनी हो तो उन दोनों के परपद एक जैसे करने पड़ते हैं।

(६) यदि निष्पत्ति के दोनों पद बराबर हों तो उसे साम्यता कहते हैं।

जैसे $\frac{3}{3}$

(७) यदि पूर्व पद, परपद से बड़ा हो तो निष्पत्ति को दीर्घ असाम्यता कहते हैं।

जैसे $\frac{4}{3}$

(८) यदि परपद, पूर्वपद से बड़ा हो तो निष्पत्ति को लघु असाम्यता कहते हैं।

जैसे $\frac{5}{6}$

अनुपात

(१) चार रुपये और तीन रुपये में $\frac{4}{3}$ या $4 : 3$ की निष्पत्ति है और बीस आम और पन्द्रह आम में भी $\frac{20}{15} = \frac{4}{3}$ या $4 : 3$ की निष्पत्ति है। अर्थात् दोनों निष्पत्तियां बराबर हैं। इसे हम इस प्रकार लिखते हैं :—

4 रुपये : 3 रुपये : : 20 आम : 15 आम

[मध्य के (चार विन्दु), बराबर है के चिन्ह (=) के चारों सिरों को प्रकट करते हैं।]

4 रुपये और 3 रुपये में जो निष्पत्ति है वही 20 आम और 15 आम की निष्पत्ति है। अर्थात् दोनों निष्पत्तियां बराबर हैं।

परिभाषा जब चार राशियों में ऐसा सम्बन्ध हो कि पहली और दूसरी की निष्पत्ति, तीसरी और चौथी की निष्पत्ति के बराबर हो, तो उन चार राशियों को अनुपाती कहते हैं। यदि a और b की निष्पत्ति c और d की निष्पत्ति के बराबर हो, तो इस सम्बन्ध को बहुधा इस प्रकार लिखा जाता है —

$$a : b :: c : d$$

अथवा $a : b = c : d$

अथवा $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

ऊपर दिये सम्बन्ध को अनुपात कहते हैं।

अनुपात में पहली और अन्तिम राशियां बाह्यपद और बीच की राशियां माध्यमिक पद कहलाते हैं।

3, 4, 6, 8 ऐसी चार संख्यायें हैं जिन में 3 और 4 की निष्पत्ति 6 और 8 की निष्पत्ति के समान है।

अतः $3 : 4 :: 6 : 8$

इस अनुपात में 3, 8 बाह्यपद हैं और 4, 6 माध्यमिक पद हैं।

निष्पत्ति और अनुपात के प्रश्नों को हल करने के कुछ उदाहरण दिये जाते हैं।

उदाहरण (१) 5 आने 4 पाई को एक रुपये की निष्पत्ति के रूप ट करो।

आने 4 पाई = $5\frac{4}{12}$ आने

निष्पत्ति के दोनों पदों का योग $= 7 + 9 = 16$

अब 272 को 16 पर भाग दो

भजनफल $= 272 - 16 = 17$

अब निष्पत्ति के प्रत्येक पद को 17 से गुणा करो।

अतः इष्ट भाग 17×7 और 17×9 हुए

या 119 और 153 उत्तर

उदाहरण (३) एक निष्पत्ति $\frac{3}{4}$ के बराबर है और उस का पूर्व पद 7 है। परपद प्रतीत करो।

$$\frac{7}{\text{परपद}} = \frac{3}{4}$$

$$\text{या } \frac{\text{परपद}}{7} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore \text{परपद} = \frac{28}{3} = 9\frac{1}{3} \quad \text{उत्तर}$$

उदाहरण (४) 33 के ऐसे दो भाग करो कि पहले भाग के 7 गुने और दूसरे भाग के 11 गुने का योग 312 हो।

पहले भाग का 7 गुना + दूसरे भाग का 7 गुना $= 33 \times 7$
$= 231$

अब दूसरे भाग का ($11 - 7$ या 4) गुना
$= 312 - 231$
$= 81$

$\therefore$ दूसरा भाग $= \frac{81}{4} = 20\frac{1}{4}$

और पहला भाग $=$ [illegible]

इष्ट भाग [illegible] और [illegible] हैं [illegible]

(१९) एक निष्पत्ति का पूर्वपद $27\frac{1}{2}$ है। यदि वह निष्पत्ति $\frac{1}{3}$ के बराबर हो, तो परपद का मान बताओ।

(२०) एक निष्पत्ति का परपद 35 है। यदि वह निष्पत्ति $\frac{3}{5}$ के बराबर हो तो पूर्व पद बताओ।

(२१) 36 के ऐसे दो भाग करो कि पहले के 6 गुने और दूसरे के 7 गुने का योगफल 231 हो।

(२२) यदि $a : b = 3 : 4$, $b : c = 5 : 6$ तो $a : c$ का मान प्रतीत करो।

(२३) जब A 7 रुपये कमाता है तो B 5 रुपये कमाता है, जब B 2 रुपये कमाता है तो C 3 रुपये कमाता है और जब C 6 रुपये कमाता है तो D 5 रुपये कमाता है। यदि A 112 रुपये कमाये, तो D क्या कमायेगा?

(२४) एक मनुष्य की आय और व्यय में 6 : 5 की निष्पत्ति है। यदि उसका व्यय 2250 रुपये हो, तो उसकी आय बताओ।

(२५) एक गाड़ी $11\frac{3}{4}$ घन्टे में $397\frac{1}{2}$ मील जाती है और दूसरी $8\frac{1}{4}$ घन्टे में $262\frac{1}{2}$ मील। दोनों गाड़ियों की चालों की तुलना करो।

सत्रहवां अध्याय

अनुपातीय भागों में विभाग

कई बार किसी राशि को ऐसे भागों में बांटने की आवश्यकता होती है जिनमें कोई विशेष अनुपात हो। इस प्रकार की बांट को अंक गणित में अनुपातीय भागों में विभाग कहते हैं। इस प्रकार के प्रश्न अनुपात के नियम द्वारा हल किये जाते हैं।

ऐसे प्रश्नों के कुछ उदाहरण नीचे दिये जाते हैं।

उदाहरण (1) 242 रुपये को तीन मनुष्यों क, ख और ग में इस प्रकार बांटो कि उनके भागों में 2, 4, 5 का अनुपात हो।

यदि हम 242 रुपयों की ऐसी ढेरियाँ लगावें, कि प्रत्येक ढेरी में 2+4+5 अर्थात् 11 रुपये हों, तो ऐसी कुल ढेरियाँ $\frac{242}{11}$ अर्थात् 22 होंगी। इस प्रकार हर ढेरी में क का भाग 2 रुपये ख का भाग 4 रुपये और ग का भाग 5 रुपये होगा।

अतः क का भाग = 2 रुपये × 22 = 44 रुपये।

और ख का भाग = 4 रुपये × 22 = 88 रुपये।

और ग का भाग = 5 रुपये × 22 = 110 रुपये।

अब 44, 88, 110 को जमा किया तो 242 प्राप्त हुए, जिससे यह स्पष्ट है कि समस्त धन ऊपर लिखे अनुपात के अनुसार बंट गया है।

इस क्रिया को संक्षेप रूप से इस प्रकार लिखते हैं —

ख का भाग $= 195 \times \frac{4}{13}$ रुपए = 60 रुपये

और ग का भाग $= 195 \times \frac{3}{13}$ रुपये = 45 रुपये

जोड़ 195 रुपये

उदाहरण(४) 2·18 को ऐसे भागों में बाँटो कि उनमें ·8, 1·7, ·95 और 2 का अनुपात हो।

$\cdot 8 + 1\cdot 7 + \cdot 95 + 2 = 5\cdot 45$

अतः इच्छित भाग यह होंगे :—

पहला भाग $= 2\cdot 18$ का $\frac{\cdot 8}{5\cdot 45}$

$= 2\cdot 18$ का $\frac{80}{545}$

$= \cdot 32$ (पहला उत्तर)

दूसरा भाग $= 2\cdot 18$ का $\frac{1\cdot 7}{5\cdot 45}$

$= 2\cdot 18$ का $\frac{170}{545}$

$= \cdot 68$ (दूसरा उत्तर)

तीसरा भाग $= 2\cdot 18$ का $\frac{\cdot 95}{5\cdot 45}$

$= 2\cdot 18$ का $\frac{95}{545}$

$= \cdot 38$ (तीसरा उत्तर)

चौथा भाग $= 2\cdot 18$ का $\frac{2}{5\cdot 45}$

$= 2\cdot 18 \times \frac{200}{545}$

$=$ [illegible] चौथा उत्तर

उदाहरण (५) 2700 रुपये राम, श्याम, चन्द्र और महेन्द्र में इस प्रकार बांटो कि :—

राम का भाग : श्याम का भाग = 1 : 2
श्याम का भाग : चन्द्र का भाग = 3 : 4
चन्द्र का भाग : महेन्द्र का भाग = 4 : 5

इस प्रश्न के अनुसार
यदि राम का भाग = 1,
तो श्याम का भाग = 2,
चन्द्र का भाग = $2 \times \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$
और महेन्द्र का भाग = $\frac{8}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{10}{3}$
इन भागों का योगफल = $1 + 2 + \frac{8}{3} + \frac{10}{3}$
= 9

$\therefore$ राम का भाग = $\frac{2700}{9}$
= 300 रुपये (पहला उत्तर)
और श्याम का भाग = 300×2 रुपये
= 600 रुपये (दूसरा उत्तर)
और चन्द्र का भाग = $300 \times \frac{8}{3}$ रुपये
= 800 रुपये (तीसरा उत्तर)
और महेन्द्र का भाग = $300 \times \frac{10}{3}$ रुपये
= 1000 रुपये (चौथा उत्तर)

उदाहरण (६) 12540 रुपयों को इन्द्र, महेन्द्र और सुरेन्द्र में इस प्रकार बांटो कि इन्द्र का भाग महेन्द्र और सुरेन्द्र के भागों का $\frac{1}{3}$ हो, और महेन्द्र का भाग इन्द्र और सुरेन्द्र के भागों का $\frac{1}{4}$ हो।

उदाहरण—(८) एक थैली में कुछ अर्ध-क्राउन के सिक्के हैं, कुछ फ्लोरिन के, और कुछ शिलिंग के। यदि सब सिक्कों का मूल्य 26 पौंड 5 शिलिंग हो, और अर्ध-क्राउन से फ्लोरिन के सिक्के तिगुने हों, और शिलिंगों के चौगुने, तो बताओ कि हर प्रकार के सिक्के कितने हैं ?

इस प्रश्न के अनुसार यदि उस थैली में एक अर्ध-क्राउन हो तो तीन फ्लोरिन होंगे और 4 शिलिंग।

किन्तु एक अर्ध-क्राउन = 2 शिलिंग 6 पैंस
और तीन फ्लोरिन = 6 शिलिंग

अतः इस अनुपात से सिक्कों के मूल्य का जोड़ } = 2 शिलिंग 6 पैंस + 6 शिलिंग + 4 शिलिंग

= 12 शिलिंग 6 पैंस

अतः यदि सारे सिक्कों की ऐसी ढेरियाँ बनायें कि प्रत्येक ढेरी के सिक्कों का मूल्य 12 शिलिंग 6 पैंस हो तो ऐसी ढेरियाँ

$$= \frac{26 \text{ पौंड } 5 \text{ शिलिंग}}{12 \text{ शिलिंग } 6 \text{ पैंस}}$$

$$= \frac{525 \times 2}{25} = 42 \text{ होंगी}$$

इस से यह ज्ञात हुआ कि थैली में से ऐसी 42 ढेरियाँ बन सकती हैं जिनमें से प्रत्येक में एक अर्ध-क्राउन, 3 फ्लोरिन और 4 शिलिंग हों। अतः सिक्कों की संख्या इस प्रकार है—

अर्ध-क्राउन = 42,
फ्लोरिन = 42 × 3 = 126,
और शिलिंग = 42 × 4 = 168 } उत्तर

(१३) 74 पौंड 5 शिलिंग 9 पैंस को क, ख और ग में इस प्रकार बाँटो कि क को ख के भाग का [illegible] मिले और ग को क के भाग का [illegible]।

(१४) तीन कमरों में 222 लड़के बैठे हैं, पहले और दूसरे कमरे के लड़कों की संख्या में 3 और 5 का अनुपात है और दूसरे और तीसरे कमरे के लड़कों की संख्या में 7 और 11 का अनुपात है। प्रत्येक कमरे के लड़कों की संख्या बताओ।

(१५) चार प्रान्तों से 50000 सैनिक भरती करने हैं। यदि इन प्रान्तों में 175002, 82434, 22116 और 20448 मनुष्य भरती होने के योग्य हों, तो बताओ, प्रत्येक प्रान्त से कितने मनुष्य लेने चाहियें?

(१६) 1540 रुपयों को क, ख, ग, में इस प्रकार बाँटो कि क का भाग ख और ग के भागों का [illegible] हो, और ख का भाग क और ग के भागों का [illegible] हो।

(१७) दो लड़कों की आयु 10 वर्ष और 8 वर्ष 9 मास हैं। यदि इनको 10 पौंड 0 शिलिंग 3 पैंस पारितोषक मिले और प्रत्येक को उसकी आयु के अनुसार पारितोषक दिया जाय, तो बताओ, प्रत्येक को क्या मिलेगा?

(१८) 333 पौंड 0 शिलिंग 8 पैंस को क, ख और ग में इस प्रकार बाँटो कि ख को क के भाग का $1\frac{1}{4}$ मिले, और ग को क और ख के भागों के योगफल के बराबर।

(१९) [illegible] पौंड [illegible] शिलिंग [illegible] पैंस को क, ख और ग में इस प्रकार बाँटो कि क को ख के भाग के [illegible] मिले और ग को ख के [illegible] शिलिंग अधिक मिलें

(२०) एक मनुष्य ने मरते समय यह इच्छा प्रकट की उसकी सम्पत्ति का आधा भाग 'क' को मिले, एक तिहाई भाग 'ख' को और चौथाई भाग 'ग' को। सिद्ध करो कि यह बटवारा ठीक नहीं है? यदि उसकी सारी सम्पत्ति 1226 पौंड 4 शि० 6 पैंस हो, तो उसको इस प्रकार बांटो कि क, ख और ग के भागों में वही अनुपात हो, जिस अनुपात से वह बटवारा करना चाहता था।

(२१) 1471 रुपये 8 आने को तीन मनुष्यों में इस प्रकार बांटो कि पहले मनुष्य को दूसरे मनुष्य के भाग का आधा मिले, और दूसरे को तीसरे के भाग का तिहाई।

(२२) 1628 रुपये 5 मनुष्यों, 12 स्त्रियों और 20 लड़कों में इस प्रकार बांटो कि प्रत्येक स्त्री को लड़के से दुगने और प्रत्येक मनुष्य को स्त्री और लड़के के भागों के योग से दुगने रुपये मिलें।

(२३) 142857 रुपये पांच मनुष्यों में इस प्रकार बांटो कि पहले को दूसरे से $1\frac{1}{2}$ गुना मिले, दूसरे को तीसरे का $1\frac{1}{3}$ गुना तीसरे को चौथे का आधा और चौथे को पांचवें का तिहाई मिले।

(२४) पांच मनुष्यों का वेतन 250 रुपये, 185 रुपये, 140 रुपये, 100 रुपये, और 50 रुपये हैं। बताओ, यदि उनको 1160 रुपये पारितोषक में मिलें तो वेतन के अनुसार प्रत्येक के भाग में कितने रुपये आयेंगे?

(२५) 1455 रुपये $\frac{1}{7}, \frac{1}{13}, \frac{11}{13}$ के अनुपात से बांटो।

(२६) 581 पौंड को तीन ऐसे भागों में बांटो कि पहले का चौगुना दूसरे के पंचगुने और तीसरे के सतगुने के बराबर हो।

(२७ तांबा पानी से ९ गुना और टीन, पानी से ७ गुना

भारी होता है। यदि 20 घन इंच टीन को 30 घन इंच तांबे में मिलावें, तो बताओ कि वह मिश्रण 50 घन इंच पानी से कितने गुना भारी होगा ?

(२८) यदि 200 औंस ऐसे सोने को जिसमें 24 में से 18 भाग निरे सोने के हैं, 128 औंस ऐसे सोने से मिलावें जिसमें 24 में स 15 भाग निरे सोने के हैं तो बताओ, इस मिश्रण में शुद्ध सोने का कितना भार होगा ?

(२९) एक मिश्रण में 100 पौंड तांबा और $31\frac{1}{2}$ पौंड टीन है। छोटे से छोटे अंकों में तांबे और टीन का निष्पत्ति बताओ।

(३०) 6015 पौंड को 'क' 'ख' 'ग' और 'घ' में इस प्रकार बाँटो कि क : ख $= \frac{1}{2} : \frac{1}{3}$, ख : ग $= \frac{2}{3} : \frac{1}{4}$, और ग : घ $= \frac{7}{15} : \frac{1}{4}$

— —

अठारहवां अध्याय

साझा या पत्ती

(१) जो धन किसी काम या व्यापार में लगाया जाता है उसे पूंजी कहते हैं।

जब दो या दो से अधिक मनुष्य मिलकर कोई व्यापार करते हैं और उसमें अपनी अपनी पूंजी लगाते हैं तो कहा जाता है कि वह साझे में व्यापार कर रहे हैं।

साझे में प्रत्येक साझी अपनी पूंजी के अनुपात से हानि और लाभ प्राप्त करता है। यदि उनकी पूंजी बराबर बराबर हो तो उन्हें हानि अथवा लाभ भी बराबर बराबर होता है। यदि उनकी पूंजी बराबर न हो, तो वह अपनी पूंजी के अनुपात से हानि या लाभ बाँट लेते हैं।

किसी व्यापार में सब साझियों की पूंजी यदि बराबर समय तक लगी रहे तो उसे साधारण या सामान्य साझा कहते हैं।

कई बार साझियों की पूंजी भिन्न भिन्न समय तक व्यापार में लगी रहती है, ऐसी अवस्था में इसे मिश्र या असमान साझा कहते हैं।

(२) साधारण साझा।

उदाहरण १ क, ख और ग ने क्रमश: 640 रुपये, 800 रुपये और [illegible] रुपये मिलाकर व्यापार किया। यदि उन्हें 600 रुपये का लाभ हो तो प्रत्येक का भाग ज्ञात करो।

उदाहरण (४) दो मनुष्यों ने एक स्थान 54 पौंड को किराये पर लिया। यदि एक ने 23 घोड़े 27 दिन तक और दूसरे ने 21 घोड़े 39 दिन तक उस स्थान पर बाँधे हों, तो बताओ वे कितना कितना किराया दें ?

पहले मनुष्य ने 23 घोड़े 27 दिन तक या 621 घोड़े एक दिन तक,

दूसरे मनुष्य ने 21 घोड़े 39 दिन तक या 819 घोड़े एक दिन तक रखे।

अब $621 + 819 = 1440$

∴ पहला मनुष्य 54 पौंड का $\frac{621}{1440}$ या 23 पौंड 5 शिलिंग 9 पैंस दे

और दूसरा मनुष्य शेष किराया, अर्थात् 30 पौंड 14 शिलिंग 3 पैंस दे। उत्तर

उदाहरण (६) क और ख ने साझे में व्यापार किया और ख ने क से ड्योढ़े रुपये लगाये। आठ महीने के पश्चात् ख ने अपनी आधी पूंजी निकाल ली और इसके दो महीने पश्चात् क ने अपनी पूंजी का ¼ भाग ले लिया। वर्ष समाप्त होने पर उन्हें 530 पौंड का लाभ हुआ। बताओ, उन्हें यह धन किस प्रकार बँटना चाहिये ?

मान लो कि क ने 2 पौंड व्यापार पर लगाये तो ख ने 3 पौंड।

इस प्रकार क के 2 पौंड 10 महीने तक और 1½ पौंड 2 महीने तक

या 20 + 3 = 23 पौंड एक महीने तक व्यापार में लगा रहा।

इसी प्रकार ख के 3 पौंड 8 महीने तक और 1½ पौंड 4 महीने तक,

या 24 + 6 = 30 पौंड एक महीने तक व्यापार में लगे रहे।

(६) क एक दुकान में साझी है और उसका प्रबन्ध भी करता है। उसने इस दुकान में 4500 रुपये लगा रखे हैं। दूसरे साझी ख ने 6500 रुपये लगाये हैं परन्तु वह दुकान का कोई काम नहीं करता। क को लाभ के भाग के अतिरिक्त 150 रुपया प्रति मास वेतन मिलता है। वर्ष भर के 4000 रुपये के लाभ को वे किस प्रकार बांटें?

(७) क, ख और ग ने साझा किया। पूंजी में क ने 3425 पौंड एक वर्ष तक, ख ने 3450 पौंड 10 मास तक और ग ने 6425 पौंड 9 मास तक लगाये। यदि उनको 2099 पौंड लाभ हो तो प्रत्येक को क्या मिलेगा?

(८) एक पुस्तक विक्रेता ने पहली जनवरी को 8000 रुपये की पूंजी से व्यापार आरम्भ किया। 15 सितम्बर के दिन उसने एक साझी को साथ मिला लिया और उस साझी ने 11500 रुपये व्यापार में लगाये। दिसम्बर के अन्त तक उन्हें 1654 रुपये का लाभ हुआ। इस लाभ में दोनों का भाग अलग अलग निकट-तम रुपयों तक बताओ।

(९) क, ख और ग ने साझे में व्यापार किया। क ने 1000 रु०, ख ने 1200 रुपये, ग ने 1800 रुपये लगाये। 4 मास पश्चात् ख ने 200 रुपये निकाल लिए और 6 मास पश्चात् क ने 200 रुपये और लगा दिये। वर्ष के अन्त में उन्हें 395 रु० [illegible]

(१०) [illegible]

रुपये के लाभ में से 120 रुपये मिलें, तो बताओ ख ने कितने रुपये लगाये थे ?

(१६) तीन मनुष्यों ने मिल कर एक खेत एक वर्ष के लिये 157 पौंड में किराये पर लिया। क ने 21 बैल 7 मास तक चराये, ख ने 18 बैल 8 मास तक और ग ने 15 बैल 12 मास तक चराये। बताओ, प्रत्येक कितना कितना किराया देगा ?

(१७) क ने 9 मास तक व्यापार में कुछ रुपये लगाये, और ख ने 10 मास तक। क ने ख से 1000 रुपये अधिक लगाये। 2310 रुपये के लाभ में से क को ख से 110 रुपये अधिक मिले। बताओ, दोनों ने कितनी कितनी पूंजी व्यापार में लगाई थी ?

(१८) क और ख ने साझा किया और क ने सारी पूंजी का $\frac{1}{5}$, 9 मास तक व्यापार में लगाया और ख को सारे लाभ का $\frac{2}{3}$ भाग मिला। बताओ, ख की पूंजी कितने समय तक व्यापार में लगी रही ?

(१९) क ने एक व्यापार 2000 रुपये लगाकर आरम्भ किया। 4 मास बीतने पर ख और 6 मास बीतने पर ग उसके साझी बन गये। एक वर्ष पश्चात जो लाभ प्राप्त हुआ उसको 10 : 8 : 7 के अनुपात में बांटा गया। बताओ, ख और ग ने कितनी कितनी पूंजी लगाई थी ?

(२०) क ने एक व्यापार में ख से 600 रुपये अधिक लगाये, परन्तु ख की पूंजी [illegible] महीने लगी रही और क की 4 महीने। यदि [illegible]28 रुपये के लाभ में से क का भाग ख के भाग से 48 रुपये अधिक हो तो प्रत्येक की पूंजी ज्ञात करो।

जाँच पत्र (दूसरा खण्ड)

पत्र १

(१) 1334025 का वर्गमूल निकालो।

(२) बताओ कितने पौंड का सरल ब्याज $3\frac{1}{2}$ वर्ष में $2\frac{1}{2}$ पौंड सैकड़ा वार्षिक दर से 143 पौंड होगा ?

(३) किसी राशि के 12 प्रतिशत का मान 43 रुपये 8 आने है। वह राशि मालूम करो।

(४) A एक बाईसिकिल B को 20% के लाभ से बेचता है और B उसी को C के हाथों 25% के लाभ से बेच देता है। यदि C को 225 रुपये देने पड़ें, तो बताओ A ने वह बाईसिकिल कितने रुपये में मोल ली थी।

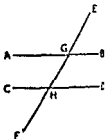
(५) यदि A और B किसी काम को 12 दिन में कर सकते हैं B और C 15 दिन में, और C और A 20 दिन में, तो बताओ वे अकेले अकेले इस काम को कितने दिन में कर सकते हैं।

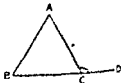
(६) 791 रुपयों को तीन ऐसे भागों में बाँटो जिनमें [illegible], [illegible], [illegible] का अनुपात हो।

पत्र २

(१) एक पाठशाला के [illegible] विद्यार्थियों की औसत आयु 12 वर्ष है, [illegible] विद्यार्थियों की 1[illegible] वर्ष और 14 विद्यार्थियों की 11 वर्ष है। सब विद्यार्थियों की औसत आयु मालूम करो।

(२) कितना मूलधन [illegible] पौंड सैकड़ा वार्षिक दर से [illegible] वर्ष में [illegible]%

(४) AB और CD समानान्तर रेखाएँ हैं। यदि $\angle AGH = 60^\circ$ तो $\angle GHD$, $\angle GHC$ और $\angle CHF$ ज्ञात करो।

(५) प्रत्येक त्रिभुज के कोणों का योग कितना होता है ?
यदि किसी त्रिभुज के दो कोण 50° और 70° के हों तो तीसरा कोण ज्ञात करो।

(६) यदि $\angle A = 59^\circ$ $\angle B = 61^\circ$ तो $\angle ACD$ ज्ञात करो।

(७) यदि किसी चतुर्भुज के सम्मुख भुज समानान्तर हों तो उसे क्या कहते हैं ?

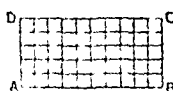
(८) यदि किसी चतुर्भुज का प्रत्येक कोण समकोण हो तो उसे क्या कहते हैं ?

(९) यदि किसी चतुर्भुज के चारों भुज बराबर समान हों और प्रत्येक कोण समकोण हों तो उसे क्या कहते हैं ?

(१०) यदि किसी चतुर्भुज के दो भुज समानान्तर हों तो उसे क्या कहते हैं ?

(११) यदि किसी चतुर्भुज के सब भुज परस्पर समान हों परन्तु उसके कोण समकोण न हों, तो उसे क्या कहते हैं ?

(१२) यदि किसी चतुर्भुज के दो दो संलग्न भुज समान हों तो उसे क्या कहते हैं ?

ABCD एक आयत है। इसकी लम्बाई AB = 10 फुट और चौड़ाई AD = 5 फुट। AB को दस बराबर भागों में और AD को 5 बराबर भागों में बांटो और AB के विभाग विन्दुओं से AD के समानान्तर तथा AD के विभाग विन्दुओं से AB के समानान्तर रेखाएँ खींचो। ABCD आयत के अब 50 बराबर भाग हो गए, इनमें से प्रत्येक भाग एक वर्ग फुट है। इसमें 5 पंक्तियाँ हैं जिनमें से प्रत्येक में 10 वर्ग हैं। अतएव आयत में $10 \times 5 = 50$ वर्ग फुट हैं।

इससे सिद्ध हुआ कि आयत के क्षेत्रफल में उसकी ऊंचाई तथा चौड़ाई की इकाइयों के गुणनफल के बराबर वर्ग इकाइयां होती हैं।

उदाहरण (१) एक आयत की लम्बाई 150 फुट और चौड़ाई 100 फुट है। उसका क्षेत्रफल बताओ।

$$\text{क्षेत्रफल} = \text{लम्बाई} \times \text{चौड़ाई} = 150' \times 100'$$

$$= 15000 \text{ वर्गफुट} = \frac{15000}{9} \text{ वर्ग गज}$$

$$= \frac{5000}{3} \text{ वर्ग गज} = 1666\tfrac{2}{3} \text{ वर्ग गज} \quad \text{उत्तर}$$

उदाहरण (२) एक आयत का क्षेत्रफल बताओ जिसकी लम्बाई 12 फुट 9 इंच और चौड़ाई 6 फुट है।

$$\text{क्षेत्रफल} = 12'.\,9'' \times 6' = \frac{51'}{4} \times 6' = \frac{153}{2} \text{ वर्गफुट}$$

$$= \frac{153}{18} \text{ वर्ग गज} = \frac{17}{2} \text{ वर्ग गज} = 8\tfrac{1}{2} \text{ वर्ग गज}$$

उत्तर

प्रश्नावली ४८

निम्नलिखित आयतों का क्षेत्रफल बताओ, जिनकी लम्बाई और चौड़ाई क्रमशः नीचे लिखी है :—

(१) 17 गज़, 10 गज़ (२) 75 गज़, 50 गज़
(३) 230 गज़, 112 फुट (उत्तर वर्ग गज़ों में दो)
(४) 20 फ़र्लांग, 10 फ़र्लांग (उत्तर एकड़ों में दो)
(५) 25 फ़र्लांग, 15 फ़र्लांग (उत्तर एकड़ों में दो)

निम्नलिखित आयतों का क्षेत्रफल वर्ग गज़ों में बताओः —

लम्बाई	चौड़ाई
(६) 9 फुट	और 6 फुट 6 इंच
(७) 10 फुट 3 इंच	और 5 फुट
(८) 15 गज़	और 9 फुट 9 इंच
(९) 8 गज़	और 5 फुट 6 इंच
(१०) a गज़ b फुट	और 2 c गज़

(११) एक वर्गाकार खेत का क्षेत्रफल $2\frac{1}{4}$ एकड़ है। बताओ उसके चारों ओर 12 फेरे लगाने के लिए कितने लम्बे तार की आवश्यकता है?

(१२ एक वर्गाकार खेत का क्षेत्रफल $22\frac{1}{2}$ एकड़ है। उस की भुजा की लम्बाई बताओ।

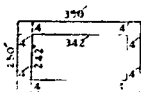
(१३) एक वर्गाकार खेत का क्षेत्रफल 16 एकड़ $401\frac{1}{2}$ वर्ग गज़ है। बताओ उसके चारों ओर 3 मील प्रति घंटा की चाल से भ्रमण करने में कितना समय लगेगा।

(१४) एक खेत का क्षेत्रफल 1 एकड़ और 2 वर्ग पोल 3 वर्ग गज़ है इस की लम्बाई चौड़ाई से दुगनी है। लम्बाई बताओ।

(१५) एक उद्यान की लम्बाई चौड़ाई से डेढ़ गुनी है। उस को समतल कराने का व्यय 3 आने प्रति गज़ की दर से 892 रुपये है। तो बताओ इस के चारों ओर बाड़ लगाने का व्यय 1 रु० 1½ आ० प्रति गज़ की दर से क्या होगा?

वर्गाकार और आयताकार क्षेत्रों के गिर्द मार्ग

उदाहरण (1) एक आयताकार मैदान की लम्बाई 350 फुट और चौड़ाई 250 फुट है। इस के चारों ओर अन्दर की ओर 4 फुट चौड़ा मार्ग है। इस मार्ग का क्षेत्रफल बताओ।

मार्ग का क्षेत्रफल = बाहरी आयत का क्षेत्रफल
− अन्दर की आयत का क्षेत्रफल
$= 350' \times 250' - 342' \times 242'$
$= 87500 - 82764$ वर्गफुट
$= 4736$ वर्गफुट उत्तर

उदाहरण (2) एक वाटिका 21 गज़ लम्बी और 10 गज़ चौड़ी है। इसके चारों ओर 6 फुट चौड़ा मार्ग है। इस मार्ग पर 5½ आने प्रति वर्ग गज़ की दर से बजरी बिछवाने का व्यय बताओ।

मार्ग का क्षेत्रफल = बाहरी आयत का क्षेत्रफल
− अन्दर के आयत का क्षेत्रफल
= [illegible] वर्ग गज़
= [illegible] वर्ग गज़
= [illegible] वर्ग गज़

(२) एक वर्गाकार घास के मैदान की एक भुजा 200 गज है। उसके बाहर चारों ओर 10 फुट चौड़ा मार्ग बना हुआ है। उस मार्ग पर 2 रु० 8 आ० प्रति वर्ग फुट की दर से कंकड़ बिछवाने में क्या व्यय होगा ?

(३) एक उद्यान 100 फुट लम्बा और 80 फुट चौड़ा है। उसके भीतर चारों ओर 8 फुट चौड़ा मार्ग बना हुआ है। मार्ग का क्षेत्रफल बताओ। उस पर 5 आ० 3 पा० प्रति वर्ग गज़ की दर से बजरी बिछवाने में क्या व्यय होगा।

(४) एक चौक 10 गज लम्बा और 7 गज चौड़ा है। तो बताओ उसके चारों ओर 4 फुट चौड़ा मार्ग बनवाने में 2 आ० 6 पा० प्रति वर्ग फुट की दर से क्या व्यय होगा ?

(५) एक आयताकार बाग 120 फुट लम्बा और 90 फुट चौड़ा है। जिसके चारों ओर 10 फुट चौड़ा रास्ता बना है तो बताओ रास्ते पर 4 शि० 6 पैं० प्रति वर्ग गज़ की दर से पत्थर के चौके बिछवाने में और बाग में 9 शि० 6 पैंस प्रति 100 वर्ग फुट की दर से घास लगवाने में क्या व्यय होगा ?

(६) एक वर्गाकार कमरे की एक भुजा 30 गज़ है। तो बताओ उसमें 18 इंच लम्बे और 15 इंच चौड़े चौके, 25 रुपये प्रति 100 चौके की दर से बिछवाने पर क्या लागत आयेगी ?

(७) एक बरामदा 42 फुट लम्बा और 15 फुट चौड़ा है। उसमें 18 इंच वर्ग के चौके लगवाने में 15 रुपये प्रति कोड़ी की दर से क्या व्यय होगा।

(८) एक कमरा 2[illegible] फुट लम्बा और 15 फुट चौड़ा है। उसके चारों ओर [illegible] फुट चौड़ा बरामदा बना हुआ है। तो बताओ उस बरामदे में 1 फुट [illegible] इन्च चौड़े चौके कितने लगेंगे ?

क्षेत्रफल $= 2(l+b)h$, जबकि $l =$ लम्बाई, $b =$ चौड़ाई और $h =$ कमरे की ऊँचाई।

उदाहरण १—एक कमरा 20 फुट लम्बा, 18 फुट चौड़ा और 15 फुट ऊंचा है। इसकी दीवारों पर 2 आ० 6 पा० प्रति वर्ग गज की दर से सफ़ेदी कराने का क्या व्यय होगा ?

चारदीवारी का क्षेत्रफल $= (20+18) \times 2 \times 15$ वर्ग फुट

$= 76 \times 15$ वर्ग फुट

$= 1140$ वर्गफुट $= \frac{1140}{9}$ वर्ग गज

$\therefore$ दीवारों पर सफ़ेदी कराने का व्यय $= \frac{1140}{9} \times \frac{5}{32}$ रु०

$= \frac{475}{24}$ रु०

$= 19$ रु० 12 आ० 8 पा० उत्तर।

उदाहरण २—एक कमरा 22 फुट लम्बा 14 फुट चौड़ा और 10 फुट 6 इंच ऊंचा है। इसकी दीवारों पर $\frac{1}{3}$ ऊंचाई तक रंग किया गया है और $\frac{2}{3}$ पर कागज़ लगाया गया है। रंग $7\frac{1}{2}$ पैंस प्रति वर्ग गज़ की दर से कराया गया है। कागज़ का मूल्य 5 शि० 2 पैं० प्रति वर्ग गज़ है और कागज़ लगवाने का व्यय 2 पैंस प्रति वर्ग गज़ है। कुल लागत बताओ।

$\frac{1}{3}$ ऊँचाई $= \frac{21}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{2}$ फुट

कमरे की दीवारों का क्षेत्रफल $= (22+14) \times 2 \times \frac{7}{2}$

$= 756$ वर्गफुट

$= \frac{756}{9}$ वर्गगज़

$= 84$ वर्गगज़

टिकियों का मूल्य $= 96 \times 1024 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{16}$ रुपये
$= 3072$ रुपये उत्तर

उदाहरण (४) एक कमरे की लम्बाई 30 फुट, चौड़ाई 22 फुट और ऊंचाई $18\frac{1}{2}$ फुट है। उसमें 5 द्वार और 3 खिड़कियाँ हैं और प्रत्येक द्वार या खिड़की का क्षेत्रफल 30 वर्गफुट है। कमरे की दीवारों पर 3 आने प्रति वर्गगज़ की दर से रंग करवाने की लागत बताओ।

दीवारों का क्षेत्रफल $= (30 + 22) \times 2 \times 18\frac{1}{2} = 1924$ वर्गफुट

द्वारों और खिड़कियों का क्षेत्रफल $= 30 \times 8 = 240$ वर्गफुट

जितने क्षेत्रफल पर रंग करवाना है, वह $= 1924 - 240 = 1684$ वर्गफुट

रंग करवाने की लागत $= \frac{1684}{9} \times \frac{3}{16} = \frac{421}{12}$ रुपये
$= 35$ रुपये 1 आना 4 पाई उत्तर

उदाहरण (५) एक कमरे की दीवारों का क्षेत्रफल 640 वर्गफुट है। यदि उसकी लम्बाई $15\frac{1}{2}$ फुट और ऊंचाई 12 फुट हो, तो चौड़ाई बताओ।

मान लो कि कमरे की चौड़ाई x फुट है, तो

चारों दीवारों का क्षेत्रफल $= (15\frac{1}{2} + x) \times 2 \times 12$ वर्गफुट
$= 24 (15\frac{1}{2} + x)$ वर्गफुट

. $24 (15\frac{1}{2} + x) = 640$

या $15\frac{1}{2} + x = \frac{640}{24} = \frac{80}{3}$

या $x = \frac{80}{3} - 15\frac{1}{2} = \frac{160 - 93}{6} = \frac{67}{6}$ फुट

$= 11$ फुट

अतः कमरे की चौड़ाई 11 फुट $= 11$ फुट 2 इंच उत्तर

(९) एक हौज 20 फुट लम्बा, 16 फुट चौड़ा और 12 फुट गहरा है। उसकी भीतरी दीवारों और तली पर 8 आने प्रति वर्ग गज के भाव से रोगन कराने पर क्या लागत आयेगी ?

(१०) एक कमरे की लम्बाई, चौड़ाई और ऊंचाई क्रमशः 25 फुट 7 इंच, 20 फुट 5 इंच और 14 फुट है। इसकी दीवारों पर 3 शिलिंग 6 पैंस प्रतिवर्ग गज़ के भाव से कागज़ लगवाया गया और छत पर 1 शिलिंग 2 पैंस प्रतिवर्ग फुट के हिसाब से रोगन कराया गया। कुल लागत बताओ।

(११) एक कमरा 28 फुट लम्बा, 20 फुट चौड़ा और 13 फुट ऊंचा है। इसमें कई द्वार और खिड़कियां हैं। यदि उन सब का क्षेत्रफल दीवारों के क्षेत्रफल का आधा हो, तो दीवारों पर 12 आने प्रतिवर्ग गज़ के हिसाब से कागज़ लगवाने का व्यय ज्ञात करो।

(१२) एक कमरा 16 फुट चौड़ा और 12 फुट ऊंचा है। उस कमरे में 3 आने प्रतिवर्ग गज़ की दर से चटाई बिछवाने पर 7 रुपये 9 आने 4 पाई खर्च हुए। यदि उस कमरे में 6 द्वार हों और प्रत्येक द्वार का विस्तार 6 फुट × 3 फुट हो, तो उसकी दीवारों पर कागज लगाने का खर्च बताओ, जबकि कागज का मूल्य भी 3 आने प्रतिवर्ग गज़ हो।

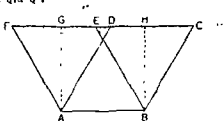
(१३) एक कमरे की ऊंचाई 11 फुट है और उसकी लम्बाई, चौड़ाई से दुगनी है। उसकी दीवारों पर 143 गज़ लम्बा 2 फुट चौड़ा कागज़ लगता है। कमरे के फर्श का क्षेत्रफल बताओ।

(१४) एक कमरा 16 फुट चौड़ा 15 फुट ऊंचा है। उसके फर्श पर 1 शिलिंग 3 पैंस प्रतिवर्ग गज़ की दर से चटाई लगवाने पर 2 पौंड 13 शिलिंग 4 पैं० खर्च आया। यदि उस कमरे के 8 द्वार हों और प्रत्येक द्वार का विस्तार 4 फुट × 7½ फुट हो, तो

प्रति गज़ के भाव का 1 फुट 8 इंच चौड़ा कागज़ लगवाया तो 5 पौंड 5 शिलिंग लागत आई। कमरे की ऊंचाई ज्ञात करो।

(२०) एक कमरा 30 फुट लम्बा और 20 फुट चौड़ा है। उस में 9 फुट × 5 फुट के 3 द्वार हैं और $5\frac{1}{2}$ फुट × 4 फुट की 5 खिड़कियाँ हैं। यदि उस की दीवारों पर 3 आने प्रति वर्गगज़ के हिसाब से रोगन करवाने की लागत 340 रुपये 11 आने हो, तो उसकी ऊंचाई ज्ञात करो।

(२१) एक कमरे की लम्बाई, चौड़ाई से तिगुनी है। उस की दीवारों पर 8 आने प्रति वर्ग गज़ के हिसाब से रंग करवाने पर 80 रुपये खर्च हुये और छत पर 4 आने प्रति वर्ग गज़ के भाव से सफेदी कराने में 18 रुपये 12 आने लगे। कमरे की ऊंचाई बताओ।

और एक ही समानान्तर रेखाओं के बीच में स्थित हों, तो वे क्षेत्रफल में बराबर होते हैं।

मान लो कि दो समानान्तर चतुर्भुज ABCD और ABEF एक ही आधार ABपर दो समानान्तर रेखाओं AB और CF के मध्य स्थित हैं। A और B से CF पर AG और BH लम्ब डालो।

अब स० च० ABCD = आयत ABHG

और स० च० ABEF = आयत ABHG

∴ स० च० ABCD = स० च० ABEF

उपनियम (२) समानान्तर चतुर्भुज का

क्षेत्रफल = आधार × ऊंचाई

ऊपर सिद्ध किये गए नियम में जो चित्र पिछले पृष्ठ पर दिया गया है उसमें, स० च० ABEF = आयत ABCD

और आयत ABCD का क्षेत्रफल = AB × BC

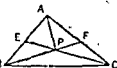
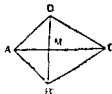
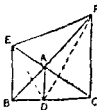
∴ स० च० का क्षेत्रफल = AB × BC

अब स० च० ABEF का आधार AB है और ऊंचाई BC है

∴ समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊंचाई।

अभ्यास

(1) क्षेत्रफल में समान जिन समानान्तर चतुर्भुजों की ऊंचाइयाँ बराबर हों, उनके आधार भी बराबर होते हैं

(३) E और F, $\triangle ABC$ की AB और AC भुजाओं के मध्य बिन्दु हैं; CE, और BF, P बिन्दु पर मिलते हैं। सिद्ध करो, कि $\triangle ABP$, BCP और ACP बराबर हैं।

(४) चतुर्भुज ABCD में कर्ण AC दूसरे कर्ण BD के मध्य बिन्दु में से होकर जाता है, सिद्ध करो कि कर्ण AC, चतुर्भुज को दो बराबर भागों में बाँटता है।

(५) $\triangle ABC$ के शीर्ष बिन्दुओं A, B तथा C से तीन समानान्तर सरल रेखाएं खींची गई हैं जो सम्मुख भुजाओं को क्रमश: D, E और F पर मिलती हैं। सिद्ध करो कि $\triangle DEF = 2\triangle ABC$

[संकेत—$\triangle EBC = \triangle EBF$, $\triangle ADB = \triangle ADE$ और $\triangle ADF = \triangle ADC$]

(६) स॰ च॰ ABCD में BC तथा CD के क्रमश: E और F मध्य बिन्दु हैं, सिद्ध करो कि $\triangle AEF =$ स॰ च॰ ABCD (दिल्ली 1947)

ABCD चतुर्भुज की BC भुजा का E मध्य बिन्दु है और BF ॥ AE तथा CF ॥ DE खींची गई हैं, सिद्ध करो कि $\triangle ADF =$ चतुर्भुज ABCD

(१२) स० च० ABCD की भुजा CD को E बिन्दु तक बढ़ाया गया है, सिद्ध करो कि $\triangle EAC = \triangle EAB + \triangle EAD$

(१३) सम चतुर्भुज का क्षेत्रफल इसके कर्णों के गुणनफल का आधा होता है।

(१४) स० च० ABCD की BC भुजा में किसी बिन्दु E से एक रेखा DEF ऐसी खींची गई है जो AB को बढ़ाने पर F पर मिलती है; सिद्ध करो कि:—
$\triangle AEB = \triangle CEF$
संकेत:—DB को मिलाओ।

(१५) समान ऊँचाइयों वाले त्रिभुजों के क्षेत्रफल उनके आधारों के समानुपाती होते हैं।

उदाहरण (१) एक त्रिभुज का आधार 16 फुट है और ऊँचाई 10 फुट। इसका क्षेत्रफल बताओ।

क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times 16 \times 10$ वर्गफुट
$= 80$ वर्गफुट

उदाहरण (२) एक त्रिभुज का क्षेत्रफल 60 वर्ग इंच है और इसकी ऊँचाई [illegible] फुट है। इसका आधार मालूम करो।

क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ आधार × ऊँचाई

∴ आधार $= \frac{2 \text{ क्षेत्रफल}}{\text{ऊँचाई}} = \frac{2 \times 60}{[illegible]}$
= 5 इंच [illegible]

उदाहरण [illegible] एक त्रिभुज का क्षेत्रफल [illegible] है। यदि [illegible] है ?

क्षेत्रफल [illegible]

आधार [illegible]

(११) ऊंचाई 6 फुट 3 इंच, क्षेत्रफल 120 वर्गफुट

समकोण त्रिभुजों का क्षेत्रफल प्रतीत करो। जिन भुजों [illegible] बीच में समकोण हैं उनकी लम्बाइयां नीचे दी गई हैं।

(१२) 2 फुट 3 इंच, 1 फुट 4 इंच

(१३) 3 फुट 2 इंच, 2 फुट 3 इंच

(१४) 55 गज, 3·5 गज (१५) 8·4 सम, 6·25 सम

पाइथोगोरस का नियम

किसी मोटे कागज पर एक समकोण त्रिभुज बनाओ और उस के तीनों भुजों पर वर्ग बनाओ।

छोटे वर्ग [illegible] के केन्द्र प्रतीत करो। [illegible] पर
[illegible]ों के कर्ण एक दूसरे को काटते हैं वह बिन्दु वर्ग का केन्द्र होता है
[illegible] बिन्दु से एक रेखा त्रिभुज के कर्ण के समानान्तर खींचो एक और

(२) 12 सम, 9 सम;

(३) 108 मम, 45 मम;

(४) 1 फुट 8 इंच, 1 फुट 9 इंच;

(५) 4 गज़ 2 फुट 7 इंच, 1 गज़ 2 फुट;

निम्नलिखित समकोण त्रिभुजों के कर्ण और एक भुज दिये हुए हैं। दूसरा भुज प्रतीत करो।

(६) कर्ण = 41 सम; भुज = 9 सम।

(७) कर्ण = 2 फुट 10 इंच; भुज = 1 फुट 8 इंच।

(८) कर्ण = एक गज़ 2 फुट 5 इंच; भुज = एक गज़ एक फुट 8 इंच

(९) एक समकोण त्रिभुज के भुजों की निष्पत्ति 7 : 24 है यदि कर्ण 625 फुट हो, तो दोनों भुज प्रतीत करो।

(१०) एक समकोण त्रिभुज का लम्ब कर्ण का $\frac{5}{13}$ है यदि आधार 12 फुट हो, तो लम्ब और कर्ण बताओ।

(११) यदि किसी समकोण त्रिभुज के आधार और लम्ब की निष्पत्ति 3 : 4 हो और कर्ण 65 फुट हो, तो आधार और लम्ब बताओ।

(१२) एक आयत के भुज 3 फुट और 2 फुट 3 इंच हैं। कर्ण प्रतीत करो।

(१३) किसी आयत के भुजों की निष्पत्ति 5 : 12 है। यदि कर्ण और बड़े भुज का अन्तर ४ फुट हो, तो छोटा भुज प्रतीत करो।

(१४) एक वर्ग का भुज 13 गज़ है, कर्ण प्रतीत करो।

(१५) एक वर्ग का क्षेत्रफल [illegible] कर्ण प्रतीत करो।

(१६) एक वर्ग का कर्ण [illegible] फुट है उसका क्षेत्रफल वर्ग गज़ों में प्रतीत करो।

(२३) एक 25 फुट लम्बी सीढ़ी ठीक दीवार के साथ खड़ी है। उसके नीचे के सिरे को कितना सरकायें कि ऊपर का सिरा दीवार से 5 फुट नीचे आ जाय ?

(२४) एक 50 फुट लम्बी सीढ़ी गली के एक स्थान से गली की सीधी खड़ी दीवार की 40 फुट की ऊंचाई तक पहुँचती है। यदि सीढ़ी को पलट कर सामने की दीवार के सहारे लगाया जाये तो सीढ़ी 48 फुट की ऊंचाई तक पहुँचती है। गली की चौड़ाई बताओ।

(२५) एक मनुष्य एक नदी के एक तट पर खड़ा होकर देखता है कि 25 फुट लम्बी सीढ़ी दूसरे तट पर खड़े हुए एक सीधे वृक्ष की टहनी पर टिक सकती है। यदि वह टहनी भूमि से 20 फुट की ऊंचाई पर हो, तो नदी की चौड़ाई बताओ।

(२६) मुझे एक वर्गाकार खेत के कर्ण के साथ-साथ तीन मील प्रति घण्टा की चाल से चलने में 6 मिनट लगते हैं। खेत की परिमिति (Perimeter) ज्ञात करो।

(२७) A, B और C तीन ग्राम हैं। A, B से ठीक उत्तर में 150 मील की दूरी पर है; और A, C के ठीक पश्चिम 80 मील की दूरी पर है। बताओ, B और C के बीच कितना अन्तर है ?

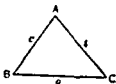
(२८) निम्नलिखित समकोण त्रिभुजों के कर्ण दिये हुये हैं, भुज प्रतीत करो।

$\sqrt{5}$ इंच, $\sqrt{41}$ सम, $\sqrt{61}$ सम, $\sqrt{10}$ इंच।

(२९) किसी सम-त्रिभुज की परिमिति एकवर्ग की परिमिति के बराबर है, उनके क्षेत्रफलों की निष्पत्ति प्रतीत करो।

A

c b

B a C

त्रिभुज ABC में $\angle A$ के सामने के भुज की लम्बाई a, $\angle B$ के सामने के भुज की लम्बाई b, और $\angle C$ के सामने के भुज की लम्बाई c मान लो और त्रिभुज की अर्ध परिमिति को s मान लो, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल $=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

उदाहरण -(१) एक त्रिभुज के भुज 13, 14, 15 फुट हैं, क्षेत्रफल बताओ।

अर्ध परिमिति $=\frac{13+14+15}{2}$

$=21$ फुट

क्षेत्रफल $=\sqrt{21\times(21-13)\times(21-14)\times(21-15)}$ वर्गफुट

$=\sqrt{21\times8\times7\times6}$ वर्ग फुट

$=84$ वर्गफुट उत्तर

प्रश्नावली ५३

त्रिभुज का क्षेत्रफल प्रतीत करो, जब कि

(१) जब कि प्रत्येक भुज = 18 फुट हो।

(२) भुज 42 गज 40 गज 26 गज हो।

(३) भुज 56 फुट, 3 फुट, 25 फुट हो।

(४) भुज 51 गज 52 गज, 53 गज हो।

उदाहरण (२) एक सामानान्तर चतुर्भुज खेत का क्षेत्रफल एक एकड़ है और उसका आधार 80 गज 2 फुट है, ऊँचाई प्रतीत करो।

क्रिया:—ऊँचाई $= \frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{आधार}} = \frac{4840}{80\frac{2}{3}}$

$= \frac{4840 \times 3}{242}$

$= 60$ गज उत्तर

उदाहरण (३) एक समलम्ब के समानान्तर भुज 7 सम और 9 सम हैं और ऊंचाई 6 सम है। क्षेत्रफल बताओ।

क्रिया—क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}(7+9) \times 6$ वर्गसम

$= \frac{1}{2} \times 16 \times 6$

$= 48$ वर्ग सम उत्तर

उदाहरण (४) एक समलम्ब का क्षेत्रफल 2646 वर्गगज है और उसके समानान्तर भुज 54 गज और 72 गज हैं, ऊँचाई प्रतीत करो।

क्रिया—

समानान्तर भुजों का अर्ध योगफल $= \frac{1}{2}(54+72)$ गज

$= 63$ गज

ऊँचाई $= \frac{2646}{63}$ गज

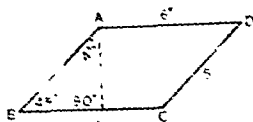
$= 42$ गज उत्तर

समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल प्रतीत करने की रीति, जबकि भुज दिये हुए हों और बीच के कोण 30°, 45°, 60°, 150°,

135°, 120° के हों।

उदाहरण (९) एक समानान्तर चतुर्भुज के संलग्न भुज 5
6 इंच हैं और बीच का कोण = 45°; क्षेत्रफल प्रतीत करो।

क्रिया—

मान लो कि ABCD एक समानान्तर चतुर्भुज है जिसमें
AB = 5″ BC = 6″, और कोण ABC = 45°

A से BC पर AL लम्ब गिराया

स्पष्ट है कि $\angle BAL = 45°$

अतः त्रिभुज ABL के कोण 45°, 45°, 90° हैं।

इसलिए भुजों की निष्पत्ति : $1 : 1 : \sqrt{2}$ है

$\because AB = 5''$

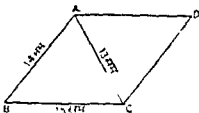
$\therefore AL = BL = \frac{5}{\sqrt{2}}$

ABCD का क्षेत्रफल = BC × AL

$= 6 \times \frac{5}{\sqrt{2}}$

$= 15\sqrt{2}$

= [illegible]1·213 व० इंच उत्तर

[illegible] एक समानान्तर चतुर्भुज के संलग्न भुज
और [illegible] है क्षेत्रफल
[illegible]

समानान्तर चतुर्भुज ABCD में

AC = 13 सम, AB = 14 सम, BC = 15 सम,

समानान्तर चतुर्भुज ABCD = त्रिभुज ABC + त्रिभुज ACD

= 2 त्रिभुज ABC

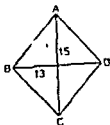
त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल $= \sqrt{21 \times 8 \times 7 \times 6}$

$= 7 \times 4 \times 3$

= 84 वर्ग सम

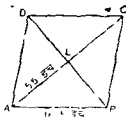
अतः ABCD का क्षेत्रफल = $84 \times 2 = 168$ वर्ग सम

उदाहरण (१०) एक समानान्तर चतुर्भुज की दो संलग्न भुजाएं 12 फुट और 8 फुट लम्बी है और एक कर्ण 10 फुट लम्बा है। दूसरे कर्ण की लम्बाई बताओ।

समानान्तर चतुर्भुज ABCD में AB = 8 फुट, BC = 12 फुट और AC = 10 फुट। BD की लम्बाई ज्ञात करो।

मानलो कि सम चतुर्भुज ABCD में AC = 15 फुट और BD = 13 फुट

$$\text{क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times 13 \times 15 \text{ वर्ग फुट}$$
$$= \frac{195}{2} = 97\frac{1}{2} \text{ वर्ग फुट}$$

97 वर्ग फुट 72 वर्ग इंच उत्तर

उदाहरण (१०) एक सम चतुर्भुज की एक भुजा $36\frac{1}{2}$ इंच लम्बी है और उसका एक कर्ण 55 इंच लम्बा है। दूसरे कर्ण की लम्बाई बताओ।

सम चतुर्भुज ABCD में AB = $36\frac{1}{2}$ इंच और AC = 55 इंच। दोनों कर्ण एक दूसरे को L बिन्दु पर काटते हैं।

[संकेत—यह कर्ण समचतुर्भुज को दो समत्रिभुजों में बाँटता है]

(९) एक समानान्तर चतुर्भुज क्षेत्र का क्षेत्रफल $2\frac{1}{4}$ एकड़ है और उसकी ऊंचाइयां 55 गज तथा $82\frac{1}{2}$ गज है। दो संलग्न भुजाओं की लम्बाइयां बताओ।

समानान्तर चतुर्भुज की सलग्न भुजाएं और बीच का कोण दिए हुए हैं, क्षेत्रफल प्रतीत करो।

(१०) 24 फुट 10 फुट, बीच का कोण $= 30^\circ$
(११) 30 गज, 30 गज, बीच का कोण $= 45^\circ$
(१२) 36 गज 24 गज, बीच का कोण $= 60^\circ$
(१३) 14 फुट, 11 फुट, बीच का कोण $= 150^\circ$
(१४) 16 फुट, 14 फुट, बीच का कोण $= 135^\circ$
(१५) 16 गज, 14 गज बीच का कोण $= 120^\circ$

(१६) एक समलम्ब के समानान्तर भुज 15 गज और 19 गज है और उनका लम्बात्मक अन्तर 12 गज है। क्षेत्रफल प्रतीत करो।

(१७) एक समलम्ब के समानान्तर भुजों का योगफल 8 गज है, और ऊंचाई 4 गज एक फुट है, क्षेत्रफल प्रतीत करो।

(१८) एक समलम्ब का क्षेत्रफल 323 वर्ग गज है और समानान्तर भुजाओं के बीच का अन्तर 17 गज, तथा समानान्तर भुजाओं में से एक 23 गज है दूसरी समानान्तर भुजा बताओ।

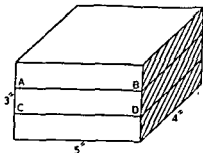
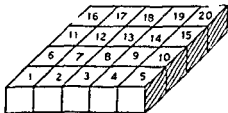
(१९) एक समलम्ब का क्षेत्रफल एक एकड़ है उसकी समानान्तर भुजाएं 55 गज और [illegible] गज हैं ऊंचाई प्रतीत करो।

२०) एक सम चतुर्भुज के कर्ण 40 गज और 60 गज हैं। भुजों का योगफल 275 गज है। उसका क्षेत्रफल, परिमिति और ऊंचाई बताओ।

२१) एक सम चतुर्भुज की भुजा 36 फुट है और उस का एक कर्ण 18 फुट है। दूसरा कर्ण और क्षेत्रफल प्रतीत करो।

२२) एक सम चतुर्भुज की भुजा 20 गज है और बड़ा कर्ण 34·64 गज है। उसका क्षेत्रफल और छोटा कर्ण प्रतीत करो।

साबुन का बना हुआ एक घनाभास लो, जिसकी लम्बाई = 5", चौड़ाई = 4", और ऊंचाई = 3" हो।

इस घनाभास को AB और CD पर काट दो, और तीन छोटे घनाभास बना लो, जिनमें से प्रत्येक की मोटाई एक इंच हो।

इसके पश्चात् इन तीन घनाभास में से किसी एक को घन इंचों में बांट लो, जैसा कि नीचे के चित्र में दिखाया गया है। स्पष्ट

कि छोटे घनाभास में घन इंचों की गिनती $= 5 \times 4 = 20$ और ऐसे ऐसे तीन घनाभास हैं, इस लिये सब घन इंचों की संख्या $= 5 \times 4 \times 3 = 60$

क्रिया:—

तल = 2 × (लम्बाई × मोटाई + चौड़ाई × मोटाई + लम्बाई × चौ

$= 2 \times \left(9 \times \frac{3}{4 \times \cancel{12}_{4}} + \frac{15}{2} \times \frac{3}{\cancel{12}_{4} \times 4} + 9 \times \frac{15}{2}\right)$ वर्गफुट

$= 2 \times \left(\frac{9}{16} + \frac{15}{32} + \frac{135}{2}\right)$ वर्ग फुट

$= 2 \times \frac{2193}{\cancel{32}_{16}} = \frac{2193}{16}$ वर्ग फुट

= 137 वर्गफुट 9 वर्ग इंच

आयतन = लम्बाई × चौड़ाई × मोटाई

$= 9 \times \frac{15}{2} \times \frac{3}{4 \times \cancel{12}_{4}} = \frac{135}{32}$ घन फुट

= 4 घन फुट 378 घन इंच उत्तर

उदाहरण (४) एक घन का किनारा 7" है उसका तल आयतन बताओ।

क्रिया:—तल = 6 × $(7)^2$ = 294 वर्ग इंच

आयतन = 7 × 7 × 7 = 343 घन इंच उत्तर

उदाहरण (५) एक तालाब 28 फुट लम्बा, 16 फुट 6 इंच चौ और 20 फुट गहरा है। उसमें 12 फुट की गहराई तक पानी है बतलाओ इस तालाब में कितने टन पानी है, जबकि एक घनफुट पा का बोझ $62\frac{1}{2}$ पौंड हो?

क्रिया—पानी का आयतन = 28 × $\frac{33}{2}$ × 12 घन फुट

पानी का बोझ = 28 × $\frac{33}{2}$ × 12 × पौंड

है। यदि कमरे की चौड़ाई 34 फुट हो, तो बताओ, उसकी लम्बाई और ऊँचाई क्या होगी ?

(११) एक खेल का मैदान 90 फुट लम्बा और 45 फुट चौड़ा है। उस पर मिट्टी डाल कर उसे 2 इंच ऊँचा करना है। बताओ, कितने घन फुट मिट्टी की आवश्यकता है ?

(१२) एक टंकी में 625 गैलन पानी भरा गया। यदि टंकी की लम्बाई 12 फुट 6 इंच हो और चौड़ाई 9 फुट, तो बताओ टंकीमें कितने इंच पानी चढ़ जायगा, जब कि एक घन फुट पानी = $6\frac{1}{4}$ गैलन ?

(१३) एक टंकी 12 फुट 6 इंच लम्बी, 11 फुट 3 इंच चौड़ी और 8 फुट गहरी है। उसमें जितना पानी समा सकता है उतना ही एक वर्गाकार टंकी में समा सकता है। यदि दूसरी टंकी का किनारा 15 फुट हो, तो उसकी गहराई प्रतीत करो।

(१४) यदि एक घन गज खुदाई पर 4 आने 6 पाई लागत आती हो, तो बताओ 1200 फुट लम्बी, 15 फुट चौड़ी और 10 फुट गहरी खाई खोदने की लागत क्या होगी ?

(१५) एक कमरा 22 फुट लम्बा, 15 फुट चौड़ा और 14 फुट ऊँचा है। उसमें एक द्वार $5' \times 3\frac{1}{2}'$ और दो खिड़कियाँ $2' \times 3'$ हैं। यदि एक ईंट की लम्बाई 9 इंच, चौड़ाई $4\frac{1}{2}$ इंच मोटाई 3 इंच हो और दीवार की मोटाई $1\frac{1}{2}$ फुट हो, तो दीवारों में कितनी ईंटें लगेंगी ?

(१६) एक घन का आयतन 3 घन फुट 648 घन इंच है। उसके एक किनारे की लम्बाई बताओ

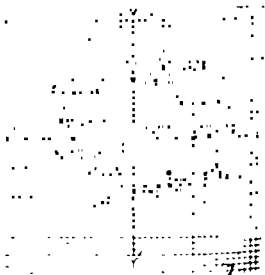
[संकेत—गुणनखण्ड द्वारा]

(१७ तीन धातु के घनों को जिनके किनारे 6 इंच, 8 इंच और 10 इंच हैं, पिघला कर एक घन बनाया गया। यदि ऐसा

दृष्टान्त—

1. नीचे दिये हुये चित्र में निम्नलिखित बिन्दु अंकित किये हुए हैं :—

O (0,0); A (10,0); B (8,6); C (5,12); D (0,10); L (– 6,8); M (– 12,3); N (– 10,0) P (– 8, – 6); Q (– 5, – 11); R (0,– 9); S (6, – 8); और T (14, – 5).

[illegible] – 6,0); और [illegible] (0, – 5) अंकित किये हुए हैं

लम्ब ऊपर को खींचो जो लेखा चित्र को P पर मिले। P से OY पर एक लम्ब PR डालो।

P के नियामक (25, 6¼) हैं। अतः 25 वस्तुओं का मूल्य 6¼ रुपये हैं।

इस लेखाचित्र द्वारा हम यह भी बता सकते हैं कि किसी बताये हुए मूल्य को कितनी वस्तुयें मिल सकती हैं।

उदाहरण (२) किसी स्थान पर सितम्बर 1949 के पहले दस दिनों में वायु दाब मापक द्वारा निम्नलिखित माप पढ़े गये। इन्हें लेखाचित्र द्वारा प्रकट करो।

दिन	1	2	3	4	5	6
वायु दाब इंचों में	29·66	29·59	29·60	29 67	29·69	29 72
दिन	7	8	9	10		
वायु दाब इंचों में	29 74	29·76	29 72	29·69		

एक दिन को सूचित करने के लिये २ क्षैतिज भाग लो और ·01 इंच को सूचित करने के लिये एक ऊर्ध्वाधर भाग लो।

इन बिन्दुओं को अंकित करो और इन्हें क्रमशः सरल रेखाओं द्वारा मिला दो।

न्यूनतम दबाव 29 59 है, इसलिए यदि हम कोटियों को 29·56 से मापना आरम्भ करें, तो लेखाचित्र बनाने में सुगमता होगी।

प्रश्नावली ६२

(1) किसी महीने के पहले 10 दिनों में वायु दाब मापक आँकड़े (इंचों में) पढ़े गये। बिन्दु अंकित करो सरल रेखा खींचकर लेखा चित्र द्वारा इन परिवर्तनों को करो।

दिन	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
दाब	29·7	28·0	28·8	29·4	29·2	29·3	29·2	29·0	29·1	29·2

(२) एक प्रान्त की जन-संख्या के आँकड़े निम्नलिखित वर्षों दिये गये हैं। यह आँकड़े लाखों में हैं।

	1851	1861	1871	1881	1891	1901
जन-संख्या	20	24	29	34·2	41	49·4

बताओ 1876 और 1897 में इस प्रान्त की जन-संख्या क्या थी?

एक क्षैतिज भाग को एक वर्ष मानो।

दो ऊर्ध्वाधर भागों को एक लाख जन-संख्या मानो।

(३) वायु दाबमापक की ऊँचाइयों के परिवर्तन इंचों में लेखा द्वारा दिखाओ।

आयु	20	25	30	35	40	45	50
आशा	40·7	35·8	32·3	28·8	25·4	22·1	18·8

बनाओ उस मनुष्य के कितने वर्षों तक और जीवित रहने की आशा की जा सकती है।

(क) जिसकी आयु 32 वर्ष हो (ख) जिसकी आयु 47·5 वर्ष हो यह भी बनाओ कि किस आयु को प्राप्त होने पर शेष जीवन की आशा (ग) 38 वर्ष (घ) 27·7 वर्ष की जा सकती है?

(७) 1900 से 1950 तक एक बढ़ई के दैनिक वेतन की बढ़ौत्री नीचे लिखी जाती है।

वर्ष	1900	1910	1920	1930	1940	1950
वेतन	1 रु०	$1\frac{1}{4}$ रु०	$1\frac{1}{2}$ रु०	2 रु०	3 रु०	5 रु०

लम्बा चित्र द्वारा 1935 और 19[illegible] में उसका लगभग दैनिक वेतन प्रदान करो।

(८) सन् 1910 से लेकर 1919 तक भारतवर्ष से बाहर जाने तथा बाहर से आने वाले माल का मूल्य (करोड़ रुपयों में) नीचे दिये गये आँकड़ों में अंकित है।

वर्ष	1910	1911	1912	1913	1914	1915	1916	1917	1918	[illegible]
[illegible]	96	105	169	111	131	114	144	162	179	152
[illegible]	117	122	136	139	168	174	177	181	183	159

इन आँकड़ों का एक रेखा चित्र बनाओ।

(९) ताप मापक यंत्र द्वारा हर दो घंटे बाद, तापमान अंकित किए गये। यह कार्य 10 बजे प्रातःकाल आरम्भ किया गया और तापमान इस प्रकार थे :—

62·5, 64, 69·6, 69°, 66·5°, 65·7°

एक रेखाचित्र बनाकर तापमान का चढ़ाव अथवा उतार का अंकित करो।

(१०) नीचे दिये देश की जन-संख्या के आँकड़े लाख में दिये गए हैं, यह जन-संख्या उस वर्ष के आरम्भ में थी।

वर्ष	1830	1835	1840	1845	1850	1855	1860
जन संख्या	20	22	24·5	28	31	36	41

इन आँकड़ों का रेखाचित्र बनाओ और बताओ कि 1847 और [illegible] के आरम्भ में जन संख्या क्या क्या थी?

(११) [illegible] इस प्रकार रहा है —

[illegible]

रेखाचित्र से इन [illegible] को अंकित करके [illegible]

(१२) वायु दाबमापक यंत्र में वायु की दाब जनवरी सन् 1944 के पहले दस दिनों में इस प्रकार रही। यह दाब इंचों में दी गई है।

29·21, 29·12, 29·00, 29 25, 29·37, 29·26, 29 46, 28·83, 28 66, 28·76।

इन आँकड़ों द्वारा एक लेखाचित्र बनाओ।

(१३) सन् 1895 से 1904 तक एक कम्पनी के हिस्सों का अधिकतम् तथा न्यूनतम मूल्य प्रतिवर्ष इस प्रकार रहा :—

वर्ष	95	96	97	98	99	00	01	02	03	04
अधिकतम् मूल्य	108$\frac{1}{8}$	113$\frac{7}{8}$	113$\frac{7}{8}$	113$\frac{3}{8}$	111$\frac{1}{8}$	103$\frac{1}{4}$	97$\frac{7}{8}$	97$\frac{7}{8}$	93$\frac{1}{4}$	91$\frac{1}{4}$
न्यूनतम मूल्य	103$\frac{1}{2}$	103$\frac{1}{4}$	110$\frac{3}{4}$	106$\frac{3}{8}$	97$\frac{3}{4}$	96$\frac{1}{4}$	91	92$\frac{5}{16}$	86$\frac{7}{8}$	85

इन आँकड़ों द्वारा एक लेखाचित्र बनाओ और दोनों प्रकार के मूल्यों को एक ही चित्र में अंकित करो।

(१४) किसी देश के आयात और निर्यात के आँकड़े (लाखों में) नीचे दिये गये हैं। इन्हें लेखाचित्र बनाकर दिखाओ।

वर्ष	1942	1943	1944	1945	1946	1947	1948	1949
आयात	50 1	53 3	51 3	53 0	53 6	51·2	50·6	49·9
निर्यात	20 6	19 5	20 5	22 2	25 8	23 7	22·2	23 1

एक लेखाचित्र द्वारा इन दोनों प्रकार के तापमानों के आँकड़े अंकित करो और बताओ कि $12{\cdot}5°$ सेन्टीग्रेड और $31°$ सेन्टीग्रेड तापमान को फारनहाइट तापमान में कितना पढ़ा जायेगा ?

(१८) यदि x इंच लम्बी लचकदार (इलास्टिक) डोरी को खींचने के लिए y औंस बोझ की आवश्यकता हो, तो नीचे लिखे x और y के मूल्यों को लेखा चित्र पर अंकित करो :—

x	2·5	3·75	6 25	7·5	10	11·25
y	8·5	8·5	9·1	9·3	9·7	9·9

लेखा चित्र द्वारा यह बताओ कि डोरी की असली लम्बाई कितनी है और यदि उसे खींच कर एक फुट लम्बा करना हो, तो कितने औंस बोझ उससे लटकाना पड़ेगा ?

(१९) नीचे की सारिणी में एक बीमा कम्पनी का 100 पौंड का प्रीमियम भिन्न भिन्न आयु के अनुसार दिया गया है।

आयु	20	22	25	30	35	40	45	50	55
प्रीमियम	1 8	1 9	2 0	2 3	2 7	3 1	3 6	4·4	5·5

इन आँकड़ों द्वारा लेखा चित्र बना कर बताओ कि 34 वर्ष और 43 वर्ष की आयु के बीमा कराने वालों को कितना कितना प्रीमियम देना होगा ?

जाँच पत्र

तीसरा खण्ड

पत्र १

(१) सिद्ध करो कि किसी आयत के क्षेत्रफल में उसकी लम्बाई तथा चौड़ाई की इकाइयों के बराबर वर्ग इकाइयाँ होती हैं।

(२) सिद्ध करो कि आयत का प्रत्येक कर्ण उसके दो बराबर भाग कर देता है।

(३) एक आयताकार भूमि की लम्बाई 57 फुट 3 इञ्च और चौड़ाई 36 फुट 7 इञ्च है। उसके बीचों बीच चौपड़ की सड़कें 5 फुट 4 इंच चौड़ी बनी हुई हैं। 1 रु० 5 आने प्रति वर्ग गज़ की दर से उन सड़कों पर पत्थर लगवाने में क्या व्यय होगा?

(४) एक कमरा 28 फुट लम्बा, 20 फुट चौड़ा और 10 फुट ऊँचा है। उसमें 5 फुट लम्बी और 3 फुट ऊँची दो खिड़कियाँ हैं। एक दरवाज़ा 7 फुट ऊँचा और 4 फुट चौड़ा है और एक अंगीठी 5 फुट ऊँची और 4 फुट चौड़ी है। तो उसकी दीवारों पर 4 इंच चौड़ा कागज़ मढ़वाने में 10 पैस प्रति गज़ की दर से क्या व्यय होगा?

(५) एक आयताकार कुण्ड जिसके भीतरी परिमाण क्रमशः 37 फुट 4 इंच, 12 फुट और 8 फुट हैं, पानी से भरा हुआ है। तो बताओ उसमें कितने टन पानी है, यदि एक घन फुट पानी का भार $62\frac{1}{2}$ पौंड हो।

पत्र २

(१) सिद्ध करो कि यदि कोई आयत और कोई समानान्तर चतुर्भुज एक ही आधार पर और एक ही समानान्तर रेखाओं के बीच में स्थित हों, तो ये क्षेत्रफल में समान होते हैं।

(२) सिद्ध करो कि समानान्तर चतुर्भुज का कर्ण उसका द्विसम विभाग कर देता है।

(३) एक वर्गाकार बाग के चारों ओर 6 फुट चौड़ा रास्ता है जिसका क्षेत्रफल 2 एकड़ है। बाग के भीतरी भाग का क्षेत्रफल प्रतीत करो।

(४) एक कमरा 21 फुट 4 इञ्च लम्बा और 15 फुट 9 इञ्च चौड़ा है। उसमें दरवाज़े और खिड़कियों का क्षेत्रफल 65 वर्ग फुट है और शेष दीवारों पर 25 इञ्च चौड़ा कागज़ मढ़वाने में 3 शि० 9 पैंस प्रति 12 गज़ की दर से 2 पौंड 8 शि० 8 पैं० व्यय होता है तो उसकी ऊँचाई बताओ।

(५) एक ईंट के परिमाण 9 इञ्च, $4\frac{1}{2}$ इञ्च और 3 इञ्च हैं। बताओ 75 फुट लम्बी, 6 फुट ऊँची और $1\frac{1}{2}$ फुट मोटी दीवार में कितनी ईंटें लगेंगी।

पत्र ३

(१) सिद्ध करो कि यदि दो समानान्तर चतुर्भुज एक ही आधार पर और एक ही समानान्तर रेखाओं के बीच में स्थित हों तो वे क्षेत्रफल में बराबर होते हैं।

(२) सिद्ध करो कि समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल
= आधार × ऊँचाई।

(३) एक आयताकार खेत का क्षेत्रफल 15 एकड़ है और उसकी भुजाओं में 3 : 2 का अनुपात है। भुजाओं के परिमाण प्रतीत करो।

(४) एक कमरा 22 फुट लम्बा और 16 फुट चौड़ा है। उसकी चारों दीवारों पर आधा गज़ चौड़ा कागज़ मढ़वाने में 1 आ० 6 पाई प्रति गज़ की दर से 19 रु० व्यय होता है। कमरे की ऊँचाई प्रतीत करो।

(५) एक 19 गज़ लम्बी भुजा वाला वर्गाकार खेत है। उसके चारों ओर 7 फुट ऊँची और 1 फुट 6 इंच मोटी दीवार बनाई गई है। बनाई 4 आने प्रति घन फुट की दर से उसके बनवाने में क्या व्यय होगा जबकि उसकी हर एक भुजा में 6 फुट चौड़ा एक दरवाज़ा हो।

पत्र ७

सिद्ध करो

(१) आयत के क्षेत्रफल में उसकी लम्बाई तथा चौड़ाई की इकाइयों के गुणनफल के बराबर वर्ग इकाइयाँ होती हैं।

(२) यदि दो आयत क्षेत्रफल में बराबर हों और लम्बाई में भी बराबर हों, तो वे चौड़ाई में भी बराबर होंगे।

(३) एक त्रिभुज खेत का आधार 880 गज़ है और उसकी ऊँचाई 540 गज़ है। खेत का क्षेत्रफल प्रतीत करो। और 1 रु० 6 आने प्रति एकड़ की दर से उसमें पानी देने का व्यय भी प्रतीत करो।

(४) एक कमरे की लम्बाई उसकी चौड़ाई से तिगुनी है और उसकी ऊँचाई 18 फुट है। उसकी दीवारों पर 1 आ० 3 पा० प्रति

पत्र ९

सिद्ध करो :—

(१) एक ही आधार पर और एक ही समानान्तर रेखाओं के बीच में स्थित, त्रिभुजों के क्षेत्रफल समान होते हैं।

(२) त्रिभुज की प्रत्येक माध्यिका (Median) उसके दो बराबर भाग कर देती है।

(३) एक समचतुर्भुज के कर्ण 6 इंच और 4·5 इंच लम्बे हैं। उसका क्षेत्रफल निकालो।

(४) एक आयताकार बाग 63 गज लम्बा और 54 गज चौड़ा है। उसके भीतर चारों ओर एक 3 गज चौड़ी सड़क बनाने में 8 आने प्रति वर्ग गज की दर से क्या व्यय होगा?

(५) पानी के एक हौज के धरातल की भीतरी लम्बाई $25\frac{1}{2}$ फुट और चौड़ाई $19\frac{1}{2}$ फुट है। धरातल का कर्ण प्रतीत करो। यदि यह हौज 14 फुट गहरा हो तो बताओ इसमें कितने टन पानी आयेगा।

(एक घनफुट पानी का भार 1000 औंस होता है)

पत्र १०

सिद्ध करो:—

(१) समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई

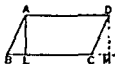
(२) किसी स० च० ABCD के कर्ण AC पर B तथा D से BP तथा DQ लम्ब गिराये जायें तो, BP = DQ

(३) एक समानान्तर चतुर्भुज की दो आसन्न भुजाएं 4·5 से० मी० और 4 से० मी० की हैं और उनके बीच का कोण 30 डिग्री का है। स० च० का क्षेत्रफल ज्ञात करो।

रनों के औसत में 5 रन की वृद्धि हो गई। बताओ बारहवीं इनिंग्ज खेलने के बाद उसकी रनों का औसत क्या था।

(३) 2000 रुपयों के ऐसे दो भाग करो कि यदि पहला भाग $3\frac{1}{2}\%$ वार्षिक दर से 6 वर्ष के लिये ब्याज पर लगाया जाय और दूसरा भाग $4\frac{1}{2}\%$ वार्षिक दर से 3 वर्ष के लिये, तो पहले भाग का ब्याज दूसरे भाग के ब्याज से दुगना हो।

(४) सिद्ध करो कि यदि एक आयत और एक समानान्तर चतुर्भुज एक ही आधार पर और एक ही समानान्तर रेखाओं के बीच में स्थित हों तो वे क्षेत्रफल में बराबर होते हैं।

(५) समानान्तर चतुर्भुज ABCD में A से BC पर AL लम्ब डालो और △ABL को काट कर CD से मिला कर रख दो,

और सिद्ध करो कि इस चित्र में दिया हुआ त्रिकोण DCM वास्तव में △ ABL ही है। अब सिद्ध करो कि समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई।

(६) एक त्रिभुज के भुज 37 फुट, 30 फुट और 13 फुट लम्बे हैं। उसका क्षेत्रफल ज्ञात करो।

(७) गुणनखण्ड करो

(i) $6x^2 - 9ax + 4bx - 6ab$

(ii) $12a^2 - 4ab - 3ax^2 + bx^2$

३) यदि किसी धन का मिश्रधन साधारण ब्याज से 3 वर्ष में 414 रुपये 6 आने हो और 5 वर्ष में 440 रुपये 10 आने, तो वह धन और ब्याज की दर बताओ।

४) सिद्ध करो कि यदि एक त्रिभुज और एक आयत एक ही आधार पर और एक ही समानान्तर रेखाओं के बीच में स्थित हों, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल आयत से आधा होता है।

५) △ABC में BC पर AD लम्ब गिराया गया है। BD पर आयत BDAL और DC पर आयत DCMA बना कर सिद्ध करो कि

$\triangle ABC = \frac{1}{2}$ आयत LBCM.

६) एक समानान्तर चतुर्भुज का आधार उसकी ऊँचाई से दुगना है और उसका क्षेत्रफल 1250 वर्ग फुट है। आधार की लम्बाई ज्ञात करो।

७) (i) $x^4 + \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{8}x^2 + \frac{7}{8}x + \frac{1}{16}$ को $x^2 + \frac{3x}{2} + \frac{1}{4}$ पर भाग दो।

(ii) $3x^2 - 4x + 3$, $4x + 5$, और $7x - 2$ का गुणनफल निकालो।

८) हल करो—

(a) $\frac{x}{4}\left(3 - \frac{8}{x}\right) - \frac{1}{3}\left(7 - \frac{3x}{4}\right) = 15\left(\frac{1}{3} - \frac{x}{64}\right)$

(b) $6y - x = 1$　$2(x + y) = 3(x - y)$

(c) $4x^2 = \frac{1}{3}x + 3$

९) दो अंकों वाली एक संख्या अंकों के योगफल से ४ गुनी है। यदि इसमें से १८ बढ़ा दें तो अंकों के स्थान बदल जाते हैं। वह संख्या ज्ञात करो।

(१०) रमेश प्रातः काल 7 बजे एक स्थान की ओर चल दिया, और महेश 9 बजे (अर्थात् 2 घण्टे पश्चात् उसी स्थान की ओर चल पड़ा। यदि रमेश की प्रति घण्टा चाल 6 मील हो और महेश की चाल 10 मील, तो लेखाचित्र बना कर ज्ञात करो कि महेश, रमेश को कब पकड़ लेगा।

पत्र ५

(१) एक घोड़ा 400 रुपये में बेचने से कुछ हानि होती है, और 500 रुपये में बेचने से उस हानि के [illegible] के बराबर लाभ होता है। घोड़े का क्रय मूल्य बताओ।

(२) A एक काम को उतने ही दिन में कर सकता है जितने दिन में B और C मिल कर कर सकते हैं। यदि A और B मिलकर उस काम को 10 दिन में कर सकें और C अकेला 50 दिन में, तो B अकेला ही उस काम को कितने दिन में कर लेगा।

(३) A, B और C एक व्यापार में साझी हैं और उनकी पूंजियों में $\frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5}$ का अनुपात है। A अपनी आधी पूंजी 4 मास पश्चात् निकाल लेता है और इसके 8 मास पश्चात् 1694 पौंड का लाभ होता है। बताओ A को क्या मिलेगा।

(४) सिद्ध करो कि यदि दो समानान्तर चतुर्भुज एक ही आधार पर स्थित हों और उनकी ऊँचाइयाँ समान हों, तो वे क्षेत्रफल में बराबर होते हैं।

२ सिद्ध करो कि यदि दो स० च० समान आधारों पर और एक ही समानान्तर रेखाओं के बीच में स्थित हों तो उनके क्षेत्रफल बराबर होते हैं।

नवमें आदमी का चन्दा मिलाने से चन्दे का औसत 5 शि० $3\frac{1}{2}$ पैं० बढ़ गया। बताओ नवमें आदमी ने कितना चन्दा दिया।

(३) यदि साधारण ब्याज से 450 रुपये का मिश्रधन 4 वर्ष में 540 रुपये हो जाय, तो 3 वर्ष में इसी दर से कितनी रकम का मिश्रधन 637 रुपये 8 आने हो जायगा।

(४) सिद्ध करो कि यदि दो त्रिभुजों के आधार समान हों और उनकी ऊँचाइयाँ भी समान हों, तो वे क्षेत्रफल में समान होते हैं।

(५) सिद्ध करो कि त्रिभुज की प्रत्येक माध्यिका (median) उसके दो बराबर भाग कर देती है।

(६) एक कमरा 23 फुट 6 इंच लम्बा और 15 फुट 9 इंच चौड़ा है। उसमें ऐसी दरी बिछवानी है कि कमरे की दीवारों के पास चारों ओर 15 इंच चौड़ा उपान्त (margin) छुटा रहे। यदि एक वर्ग गज़ दरी का दाम 16 शि० 8 पैं हो और उपान्त पर रंग करवाने का खर्च 4 पैंस प्रति वर्ग फुट हो तो कुल खर्च ज्ञात करो।

() गुणनखण्ड करो—

(a) x^3y-4xy^3

(b) $x^2+2ax-bx-2ab$

) हल करो—

(a) $\frac{y+5}{6}-\left(\frac{14-y}{2}-\frac{1}{4}\right)-\frac{2y-7}{12}$

(b) $x+y-1=0$ $4x-7y+5=0$

(c) $3+4x-4x^2$

) ऐसी दो संख्याएं ज्ञात करो कि उनका योगफल उनके

(७) गुणनखण्ड करो—

(a) $(a+2b)^2-16x^2$

(b) $x^2-(2b-3c)^2$

(c) $(3x+7y)^2-(2x-3y)^2$

(८) हल करो—

(a) $(x-\frac{1}{2})^2-(x-\frac{3}{2})^2=x+2$

(b) $\frac{5}{x}+3y=8,\ \frac{4}{x}-10y=56$

(c) $26x=21+8x^2$

(९) एक मनुष्य ने 108 मील की यात्रा की। यदि वह 2 मील प्रति घंटा अधिक चलता, तो इस यात्रा में $4\frac{1}{2}$ घंटे कम लगते। बताओ वह प्रति घंटा कितने मील चला।

(१०) एक दर्जन संगतरे 6 आने के मिलते हैं। इस भाव को लेखा चित्र द्वारा प्रकट करो, और लेखा चित्र में दिखाओ :—

(a) 11 आने 6 पाई के कितने संगतरे मिलेंगे ?

(b) $3\frac{1}{3}$ दर्जन संगतरे कितने के मिलेंगे ?

पत्र ९

(१) एक व्यापारी हर एक वस्तु पर उसके क्रय मूल्य से 25% अधिक मूल्य लिख देता है और अपने ग्राहकों को प्रसन्न करने के लिये लिखे हुए मूल्य में से 10% घटा देता है। बताओ वह कितने प्रतिशत लाभ उठाता है।

(२) A और B एक काम को 18 दिन में कर सकते हैं, B और C 12 दिन में, और C और A 24 दिन में। बताओ A अकेला ही उस काम को कितने दिन में कर सकता है।

(३) साधारण ब्याज की दर एक रुपया 9 आने सैंकड़ा प्रति मास है। 1500 रुपये का 2 वर्ष 5 मास का ब्याज महाजनी रीति द्वारा ज्ञात करो

अवस्था वर्षों में	20	25	30	35	40
प्रीमियम रुपयों में	22	24·4	27·8	31·	35·8

एक लेखा चित्र बनाकर यह मालूम करो कि 29 वर्ष की अवस्था में बीमा कराने वाले को कितना वार्षिक प्रीमियम देना होगा, और जिस मनुष्य से 33 रुपये वार्षिक प्रीमियम लिया जाय उस की अवस्था क्या है।

---

(१६) $a^5-5a^4+10a^3-10a^2+5a-1$
(१७) $1-5a^2+4a^4$ (१८) $1-a^6$
(१९) $a^3+b^3+c^3-3abc$
(२०) $x^3-y^3-z^3-3xyz$

प्रश्नावली ८

(१) x	(२) 3	(३) x	(४) $-x$
(५) bc	(६) $-bc$	(७) a	(८) $-a$
(९) $-a$	(१०) a	(११) a^2	(१२) $-a$
(१३) 1	(१४) -1	(१५) $4x^3$	(१६) $-3x^2$
(१७) -2	(१८) $3a^2$	(१९) $7a^2b^3$	(२०) a^2b^2
(२१) $-9a$	(२२) $4abc$	(२३) $3x^2$	(२४) $-9ab^2c^2$

प्रश्नावली ९

(१) $x+7$	(२) $5x+8$
(३) $x-3$	(४) $y-4$
(५) $x-2$	(६) $3x-8$
(७) $3p-5$	(८) $5x+7$
(९) $3p-2q^2$	(१०) x^2+2x+1
(११) x^2-2x+1	(१२) x^2-x-1
(१३) $2a^2-a+3$	(१४) a^2+3a+2
(१५) $4a^2+3a-2$	(१६) a^2-2a+3
(१७) $2x^2+3x-1$	(१८) a^2-5a+1
(१९) $a+1$	(२०) x^2+x+1

प्रश्नावली १०

(१) $a(3b-7a)$ (२) $x(x-3y)$
(३) [illegible]
(४) [illegible]
(५) [illegible]

प्रश्नावली १५

(१) $(x+y)(x-y)$
(२) $(2a+b)(2a-b)$
(३) $(p+3q)(p-3q)$
(४) $(2x+3y)(2x-3y)$
(५) $(x^2+2a)(x^2-2a)$
(६) $(6pq+1)(6pq-1)$
(७) $(2+5m)(2-5m)$
(८) $(3a+7)(3a-7)$
(९) $(10+p^2)(10-p^2)$
(१०) $(a+b+c)(a+b-c)$
(११) $(x+y+z)(x-y-z)$
(१२) $(p+q-r)(p-q+r)$
(१३) $(pq^2+11)(pq^2-11)$
(१४) $(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})$
(१५) $\left[\frac{p}{4}+q\right]\left[\frac{p}{4}-q\right]$
(१६) $\left[\frac{x}{5}+\frac{5}{y}\right]\left[\frac{x}{5}-\frac{5}{y}\right]$
(१७) $(1+12a^2)(1-12a^2)$
(१८) $(6x+7p^2)(6x-7p^2)$
(१९) $(10p^2+3q^2)(10p^2-3q^2)$
(२०) $(\frac{1}{11}+x^2)(\frac{1}{11}-x^2)$

प्रश्नावली १६

(१) $(x+6)(x+7)$
(२) $(a-13)(a-5)$
(३) $(x+13)(x+5)$
(४) $(p-9)(p-6)$
(५) $(x+12)(x+6)$
(६) $(x+13)(x+7)$
(७) $(x-13)(x-9)$
(८) $(x+8)(x+13)$
(९) $(a+13)(a-8)$
(१०) $(x+9)(x+12)$
(११) $(a+12)(a-9)$
(१२) $(x+12)(x+15)$
(१३) $(p+13)(p-12)$
(१४) $(a-15)(a+12)$
(१५) $(a-13)(a+11)$
(१६) $(a-16)(a+15)$
(१७) $(x+15)(x-7)$
(१८) $(a-30)(a+4)$
(१९) $(1-15x)(1-4x)$
(२०) $(1-$ [illegible] $a)(1+2a)$

(७) 38 (८) 53 (९) 82
(१०) 31 (११) 61, 43 (१२) 11, 4
(१३) 32 (१४) मनुष्य 33 रुपये, स्त्री 11 रुपये
(१५) 2730 रुपये (१६) 4 मील, 8 मील (१७) 40 वर्ष
(१८) 5 वर्ष (१९) 24 फुट, 12 फुट (२०) 38 फुट, 20 फुट
(२१) 23 (२२) 7 मील (२३) 41, 42
(२४) 70, 71 (२५) 29, 19 (२६) 150, 400
(२७) 3 फुट (२८) 20, 28 (२९) 45
(३०) 28 (३१) 16, 24, 5, 80 (३२) 22, 31, 9, 54
(३३) 4400 (३४) 30 गज़ (३५) 25
(३६) 32, 24 (३७) $12\frac{1}{4}$, $36\frac{3}{4}$ और 49 एकड़
(३८) 112 रुपये 8 आने (३९) 300 इंच
(४०) 36 पौंड, 12 पौंड, 16 पौंड

प्रश्नावली २०

(१) 4, 2 (२) 4, 1 (३) 1, 2
(४) 4, 3 (५) 0, 2 (६) 4, 1
(७) 5, 4 (८) $\frac{1}{7}$, $\frac{15}{7}$ (९) 63, 42
(१०) 5, 6 (११) 4, −3 (१२) 3, 2
(१३) $\frac{1}{2}$, 3 (१४) $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{15}$ (१५) 3, 1
(१६) 3, 2 (१७) 11, 10 (१८) $-\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$
(१९) −3, −2 (२०) 2, 0 (२१) 2
(२२) 1, $\frac{1}{2}$ (२३) 4, $5\frac{1}{2}$ (२४) 3, 7
(२५) 2, 1 (२६) 2, 1 (२७) 3, 2
(२८) 12, 9 (२९) 0, 12 (३०) 4, 0

प्रश्नावली २१

(१) 2, 1 (२) 2, 1 (३) 3, −1
(४) 2, 3 (५) 6, 4 (६) 17, 15

(५) $\frac{1}{2}$, 4 (६) $-\frac{2}{3}$, $-\frac{3}{2}$

(७) $\frac{4}{3}$, $-\frac{3}{2}$ (८) 12, −1

(९) $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}$ (१०) 1, $\frac{1}{2}$

(११) 5, $-\frac{1}{4}$ (१२) −1, $3\frac{1}{2}$

(१३) −2, −4 (१४) 0, 2

(१५) 3, 3. (१६) 2, $-2\frac{1}{5}$ (१७) −2, 6 (१८) $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$

(१९) 5, −5 (२०) −1, $\frac{1}{2}$ (२१) $2\frac{1}{2}$ (२२) 4, $\frac{1}{4}$

(२३) 1, −1 (२४) 15, −4 (२५) 17, $-\frac{1}{2}$

प्रश्नावली २५

(१) 12, 2 (२) 22, 23 (३) 16, 18

(४) 37, 39 (५) 11, 13 (६) 4,7

(७) 25 फुट, 22 फुट (८) 5 अथवा $\frac{1}{5}$ (९) 8

(१०) 9, 81 (११) 3, 6 (१२) $\frac{5}{7}$

(१३) 31 वर्ष, 11 वर्ष (१४) 48 वर्ष, 12 वर्ष

(१५) 24 सेब, एक आना प्रति सेब (१६) 50 गज़, 24 गज़

(१७) एक रुपया 4 आने (१८) 8 गज़, 6 गज़

(१९) 9 (२०) 25, 8 रुपये

(२१) 50 रुपये (२२) 12 रुपये 8 आने।

पत्र ४

(१) 60

(२) (क) $(a+b+c)(a-b+c)$ (ख) $a(c-b)(c+b-a)$

(ग) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ (घ) $(x^2+x-2)(x^2-x-2)$

(३) (क) 1 (ख) 100

(४) (क) $3\frac{1}{7}$ (ख) $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ (ग) $10\frac{1}{2}, -10$

(५) 30 वर्ष, 6 वर्ष

पत्र ५

(१) $a+b$

(२) (क) $(x+6)(x+7)$ (ख) $(x-6)(x-7)$

(ग) $(x-8)(x+3)$ (घ) $(x+17)(x-13)$

(३) (क) $x^2+\frac{1}{x^2}$ (ख) $6x^2-3x+1$

(४) (क) 20 (ख) $6, -4$ (ग) $\frac{4}{5}, -\frac{3}{8}$

(५) 25

पत्र ६

(१) $(x+4a)^2-a^2$

(२) (क) $(2x+5)(3x+7)$ (ख) $(x-6)(6x-5)$

(ग) $(3a-1)(3a+2)$ (घ) $(2x+1)(x-5)$

(३) $a-5b+3c$

(४) (क) 4 (ख) $\frac{1}{2}, -4$ (ग) $5, \frac{3}{2}$

(५) 5 घाने

पत्र ७

(१) $2a-3b+6c+3ac \quad 2x \quad b \quad 3c+3x \quad 2b-3c$

(२) (क) 102

प्रश्नावली २६

(१) केवल 8 से (२) केवल 5 से
(३) केवल 8 और 12 से (४) केवल 5, 8, 10 से
(५) केवल 5, 10 से (६) केवल 5 से
(७) केवल 5 और 15 से (८) केवल 5, 10, 11 से
(९) केवल 5, 11, 15 से (१०) केवल 5 से
(११) 6 12 से (१२) 6, 12 से
(१३) 6 12, 20 से (१४) केवल 6 से
(१५) 6 और 12 से (१६) $13\times3\times3$
(१७) 17×17 (१८) 5^4 (१९) $2\times5\times89$
(२०) $2\times13\times29$ (२१) $5\times5\times3\times13$
(२२) $2\times3\times5\times41$ (२३) $2^3\times3\times5^6$
(२४) 31 अभाज्य संख्या है (२५) $3\times3\times11$
(२६) 11×11 (२७) 3×107
(२८) $3^4\times11$
(२९) $2\times3\times3\times7\times11\times13$
(३०) $7\times11\times13\times17$ (३१) 3, 1; 4, 8, 5, 5; 7, 2
(३२) $91\times92\times93$ (३३) 414
(३७) 5 (३८) 7, 13, 17, 23
(३९) $a=7$, $b=6$ (४०) 3432

प्रश्नावली २७

(१) 24 (२) 32
(३) 36 (४) 48
(५) 44 (६) 54
(७) [illegible] (८) 128
(९) 25 (१०) 1111
(११) 2,2,6 2,5 [illegible] (१२) 2 3,14 3,3,15,7,7,6

(२०) 1·7320 (२१) 2·2360
(२२) 2·6457 (२३) ·9486 (२४) ·3478
(२५) 7·9056 (२६) 110 गज़ (२७) 3 रुपये 8 आने
(२८) 137 रुपये 8 आने (२९) 151 (३०) 15 मिनट
(३१) 7 गज़ 1 फुट (३२) 11 (३३) 21
(३४) 6467 (३५) 6 (३६) 261
(३७) 108

प्रश्नावली ३०

(१) 17 (२) 19 (३) 23
(४) 27 (५) 31 (६) 36
(७) 45 (८) 80 (९) 89
(१०) 105 (११) 900 (१२) 1405
(१३) ·3 (१४) 3·2 (१५) 75·1

प्रश्नावली ३१

(१) 12 वर्ष (२) 27 रुपये 8 आने
(३) (क) 220, (ख) $2\frac{1}{3}$, (ग) 3 4 (घ) 4 रुपये
(५) 4·9 गज़ (६) 99·25 लगभग
(७) एक शिलिंग 3[illegible] पैंस (८) 101·9
(९) 12 वर्ष 6 महीने (१०) 59
(११) 19 (१२) 18 रुपये
(१३) 25[illegible] अंश (१४) $3\frac{1}{2}$
(१५) 1249 (१६) 70 पौंड
(१७) 16 वर्ष 6 मास (१८) 4 फुट 7 इंच
(१९) 2 वर्ष (२०) 150 रुपये

(२०) 565 पौंड 19 शिलिंग,
377 „ 6 „
282 „ 10 „ 6 पैंस।

(२१) 163 रुपये 8 आने, 327 रुपये, 981 रुपये

(२२) लड़कों को 22 रुपये, स्त्रियों को 44 रुपये, पुरुषों को [illegible] रुपये।

(२३) 23166, 15444, 11583, 23166, 69498 रुपये

(२४) 100, 296, 224, 160, 80 रुपये

(२५) 195, 105 1155 रुपये

(२६) 245, 196, 140 पौंड। (२७) $8\frac{1}{8}$

(२८) 230 [illegible] (२९) 5 16

(३०) 2625, 2100, 1120, 200 पौंड

प्रश्नावली ४६

(१) 197 रुपये 2 आने, 2[illegible]9 रुपये 6 आने

(२) 105, 150 पौंड

(३) 2332 रुपये 6 आने 9 पाई
3109 रुपये 14 आने 4 पाई
3857 रुपये 5 आने 11 पाई

(४) 1106 रुपये 12 आने 1 पाई
820 रुपये 1 आना 3 पाई
654 रुपये 1 आना 0 पाई
71[illegible] रुपये 6 आने 5 पाई

(५) 202 रुपये 8 आने
[illegible] रुपये 8 आने
150 रुपये

(६) 2[illegible] [illegible] रुपये

पत्र ८

(१) 3 रुपये (२) 100 पौंड 5% पर, 150 पौंड 6% पर
(३) 384 रुपये (४) 20 (५) 9¾ घंटे
(६) A और B की पूंजी क्रमशः 1800 पौंड और 1200 पौंड।

पत्र ९

(१) 54 (२) 17 रुपये 13 आने 7 पाई लगभग
(३) 16⅔% (४) 1920
(५) 40 (६) 35, 28, 20

पत्र १०

(१) 19 वर्ष
(२) 88 रुपये 5 आने 7 पाई लगभग
(३) 70 पौंड (४) 12 रुपये 4 आने मन
(५) शाम के 7 बजे
(६) A, B, C का क्रमशः किराया = 3 पौंड 3 शिलिंग, 7 पौंड 16 शिलिंग, 18 पौंड

प्रश्नावली ४७

(१) 115° (२) 85°, (३) 50°, 130° (४) 60°, 120°, 60°
(५) 180°, 60° (६) 120° (७) समानान्तर चतुर्भुज
(८) आयत (९) वर्ग (१०) समलम्ब
(११) समचतुर्भुज (१२) पतंग (kite)

प्रश्नावली ४८

पत्र ३

(१) 2 पौंड 16 शि० $1\frac{1}{3}$ पैंस

(३) 200 रुपये, 250 रुपये, 100 रुपये । (२) 32 दिन, 300 पौंड

(५) 1·5 इंच

(७) (a) 66. (b) $(x+3)(x+8)$ (६) 1120 रुपये

(८) (a) 2. (b) $2\frac{2}{7}$, -12. (c) $-4, -\frac{2}{3}$.

(९) 110 फुट, 80 फुट

(१०) 4 रुपये (लगभग)

पत्र ४

(१) 37044

(३) 375 रुपये, $3\frac{1}{3}\%$ (२) 65°

(७) (i) $x^2 + \frac{3x}{4} + \frac{5}{4}$ (६) 50 फुट

(ii) $84x^4 + 25x^3 + 101x - 30$

(८) (a) 8. (b) 5,1. (c) $\frac{1}{10}, -\frac{5}{6}$.

(९) 72

(१०) 12 बजे ।

पत्र ५

) 460 रुपये

) 560 पौंड (२) 25 दिन में

) (a) $6x^2 - xy - y^2$. (६) 131 वर्ग फुट 60 वर्ग इंच

(a) $3\frac{1}{11}$ (b) $\frac{1}{3}$. (c) $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{7}$ (b) 7 पौंड 8 शिलिंग

2700 पौंड, 9 आदमी

(१०) सन् 1900 में ।

पत्र ६

13 आने, 12 आने

रुपये

पौंड 10 शि० 10 पैंस

पौंड शि० पैंस

और 12